Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Nature de suites.*

Étudier la nature des suites suivantes (convergentes ou divergentes), et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4.** $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

1.
$$u_n = \frac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}.$$

On sait que $|\sin(n)| \leq 1$ et $|\cos\left(n^2\right)| \leq 1$ donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_n| \leq \frac{|\sin(n)| + 3|\cos\left(n^2\right)|}{\sqrt{n}},$$

$$|u_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$$

On en déduit que (u_n) converge vers 0.

2.
$$u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}},$$

$$u_n = \frac{n\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(5 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)},$$

$$u_n = \frac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{5 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}.$$

Or $0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ donc $\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même, $0 \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ donc $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{5}$.

3.
$$u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)},$$

$$u_n = \frac{n^3(1 + 5n^{-2})}{n^2\left(4 + \frac{\sin(n)}{n}^2 + \frac{\ln(n)}{n^2}\right)},$$

$$u_n = n\frac{1 + 5n^{-2}}{4 + \frac{\sin(n)}{n}^2 + \frac{\ln(n)}{n^2}}.$$

Or $5n^{-2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{\sin(n)}{n}^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par les mêmes arguments qu'à la question précédente, et $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. On en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4.
$$u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1},$$

$$u_n = \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}},$$

$$u_n = \frac{(2n+1-(2n-1)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)},$$
$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)}.$$

On en déduit par opérations sur les limites que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 2. *Approximation du nombre d'or.*

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1+\phi}$.

1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
   La fonction $h : x \mapsto x^2 - x - 1$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Puisque $h(0) = -1$, $h(1) = -1$ et $h(2) = 1$, elle ne s'annule qu'une seule fois dans $\mathbb{R}_+$, en un point de l'intervalle $]1, 2[$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

   $$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   et ainsi de suite,

   $$u_n = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   avec n radicaux.
   Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n.
   On a tout simplement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

   $$1 \leq u_n \leq \phi.$$

   On prouve ceci par récurrence. Pour $n = 1$, $u_1 = 1$ donc la propriété est vraie.
   Supposons maintenant que la propriété est vraie au rang n, c'est à dire que $1 \leq u_n \leq \phi$. On en déduit par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$:

   $$\sqrt{1+0} \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+\phi},$$
   $$1 \leq u_{n+1} \leq \phi.$$

   Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut prouver que $u_{n+1} \geq u_n$, i.e. $\sqrt{1+u_n} \geq u_n$. Puisque les deux nombres sont positifs, cela revient à prouver que :

   $$1 + u_n \geq u_n^2,$$
   $$0 \geq u_n^2 - u_n - 1,$$
   $$0 \geq h(u_n).$$

   Ceci est vrai car la croissance de h sur l'intervalle $[1, \phi]$ et le fait que $u_n \in [1, \phi]$ nous garantit que :

   $$h(1) \leq h(u_n) \leq h(\phi),$$
   $$-1 \leq h(u_n) \leq 0.$$

5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
   Indication : on pourra utiliser le fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
   (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ car c'est une suite croissante et majorée d'après les deux questions précédentes. Par passage des inégalités larges à la limite, on a $1 \leq l \leq \phi$.
   On a aussi $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, or $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+l}$. Par unicité de la limite, on en déduit que $l = \sqrt{1+l}$. ϕ est le seul nombre positif qui vérifie ceci donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$
   On calcule pour $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right|,$$
$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{\left(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right)\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}\right|,$$
$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{u_n - \phi}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}\right|,$$
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}.$$
7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$
   On prouve enfin ceci par récurrence. Pour $n = 1$, ceci découle du fait que $u_1 = 1$ et $\phi \in [1, 2]$. Supposons maintenant que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente :
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}.$$
   La propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. *Exercice annoncé*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{1}{2}x + 5\right) = f(x).$$
On se propose dans cet exercice de montrer que f est constante.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et telle que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de n et de u_0.
   Puisqu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique, on sait qu'il faut calculer le nombre l tel que, si $u_0 = l$, la suite est constante. Ce nombre vérifie $l = \frac{1}{2}l + 5$ donc $l = 10$. La suite w définie par $w_n = u_n - 10$ est alors géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n w_0$, c'est à dire $u_n - 10 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 10)$ d'où :
$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 10) + 10$$
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie les hypothèses de l'énoncé, on déduit de la formule précédente que $u_n \to 10$ puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie les hypothèses des questions précédentes, montrons par récurrence que la suite v telle que $v_n = f(u_n)$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0$.
   Pour $n = 0$, l'initialisation de la récurrence est évidente.
   Supposons que $v_n = v_0$, on a alors $v_{n+1} = f(u_{n+1}) = f\left(\frac{1}{2}u_n + 5\right) = f(u_n) = v_n$. Ainsi, on a bien $v_{n+1} = v_0$, l'hypothèse de récurrence est héréditaire et donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrons que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$: soit donc $x \in \mathbb{R}$, considérons alors la suite u définie comme aux questions précédentes avec $u_0 = x$. On a alors $u_n \to 10$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(x)$. Puisque $u_n \to 10$, $f(u_n) \to f(10)$ par continuité de f. On en déduit, puisque la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante en la valeur $f(x)$, que $f(x) = f(10)$.
   On a montré que pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on a $f(x) = f(10)$, ce qui signifie que la fonction f est constante.

Exercice 4. *Définition des limites*

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Que signifie :

1. $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-2| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-3| \leq \epsilon.$$
2. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ M \leq x \Rightarrow |f(x)-2| \leq \epsilon.$$
3. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \leq m \Rightarrow M \leq f(x).$$

Exercice 5. *Limites avec la partie entière*

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :
$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,\ g : x \mapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,\ h : x \mapsto x^2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

On rappelle que si $y \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ d'où l'on déduit :
$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$$

En particulier, ici, on obtient pour $x > 0$:
- $\frac{1}{x} - 1 \leq f(x)$ donc on déduit de $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$ que l'on a aussi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
- $x(\frac{1}{x} - 1) \leq g(x) \leq x\frac{1}{x}$
$$1 - x \leq g(x) \leq 1$$
  D'où $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$ par encadrement.
- $h(x) = xg(x)$ d'où $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$.

Exercice 6. *Sans limites*

Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limites :

1. Notons $g : x \mapsto \sin(1/x)$
   Soit $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ pour $n \in \mathbb{N}*$.
   On a alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $g(u_n) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tandis que $g(v_n) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ donc g n'a pas de limite en 0.
2. Notons $h : x \mapsto \sin(\cos(x))$.
   Soit $u_n = 2n\pi$ et $v_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ mais $h(u_n) = \sin(1)$ tandis que $h(v_n) = 0$ donc h n'a pas de limite en $+\infty$.