Devoir surveillé

Exercice 1. *Théorème de Rolle*

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Enoncer le théorème de Rolle.
2. Soit h une application de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I, démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.
3. On considère les applications a et b de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30}$$
$$b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$$
On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0,+\infty[$. Montrer que a s'annule au plus 4 fois dans $]0,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < ..... < \alpha_n$, $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ un élément de $(\mathbb{R}^*)^n$ et f_n l'application de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k}$$
Démontrer que f_n s'annule au plus $n-1$ fois dans $]0,+\infty[$.
5. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ suivant : $P = X^{400} + 7X^{201} - 4X^{101} + 1$. Prouver que P admet au plus 6 racines réelles.

Exercice 2. *Suite récurrente et fonction contractante.*

Soit f une fonction définie sur $[0,4]$ par $f(x) = \sqrt{4+x}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0,4]$ est stable par f, et que f admet un unique point fixe α sur $[0,4]$ que l'on calculera.
2. Etudier les variations de f' et justifier que $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{4}$.
3. La suite (u_n) est définie par
$$u_0 \in [0,4] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
Montrer que si $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$
Qu'en déduit-on sur le comportement de (u_n) ?

Exercice 3. *Systèmes à paramètre*

1. Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & m \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right.$$
2. Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système :
$$\left\{\begin{array}{llllll} ax & +(1-a)y & +(1-a)z & = & a^2 \\ ax & +(1+a)y & +(1+a)z & = & a-a^2 \\ x & +y & +z & = & 1-a \end{array}\right.$$

Exercice 4. *Puissances d'une matrice.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note $B = A - I_3$, calculer B^2 et B^3. Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$.
2. Par exemple à l'aide de la formule du binôme (justifier son utilisation), donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

Exercice 5. *Matrices et suites récurrentes*

On considère les matrices :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit PQ. En déduire l'expression de l'inverse de P noté P^{-1}.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est une matrice diagonale que l'on calculera et exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, D^n.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 2-2^n & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$
5. On pose $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et on définit par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 2a_n+b_n-c_n \\ b_{n+1} & = & -a_n+c_n \\ c_{n+1} & = & -a_n-b_n+2c_n \end{array}\right.$$
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n la matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :
$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ puis que $U_n = A^nU_0$.
6. En déduire l'expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.