Devoir surveillé

1 Problème

Première partie

On considère la fonction $f : x \mapsto \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 1$: $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2}{1-x} - 1$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :
   $$g(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$
   Préciser le signe de g.
2. préciser l'ensemble de définition de f que l'on notera D.
3. En écrivant f comme la composée $f = \sqrt{|g|}$, dresser son tableau de variations.
4. Préciser les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Etudier soigneusement la dérivabilité de f en -1.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
7. Démontrer que pour tout couple $(x, y) \in D^2$ vérifiant $xy + 1 \neq 0$, on a :
   $$f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Deuxième partie

Dans cette partie, on désignera par I l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

1. On fixe $y \in I$. Montrer que la fonction $u : x \mapsto \dfrac{x+y}{1+xy}$ est définie et strictement croissante sur I. Dresser son tableau de variations et préciser $u(I)$.
2. On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions ϕ définies sur I vérifiant les trois propriétés suivantes :
   — ϕ est continue sur I,
   — ϕ est dérivable en 0,
   — $\forall (x, y) \in I^2,\ \phi(x)\phi(y) = \phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.
   La fonction nulle est une solution. On suppose dans toute la suite du problème que ϕ est une autre solution.
   (a) Montrer que $\phi(0) = 1$.
   (b) Montrer que ϕ ne s'annule pas. (On pourra raisonner par l'absurde, supposer que $\phi(x_0) = 0$ puis calculer $\phi(0)$)

(c) Montrer que tout $x \in I$ vérifie : $\phi(-x) = \dfrac{1}{\phi(x)}$.

3. (a) Soit $(x, y) \in I^2$. Montrer qu'il existe un réel h tel que $\phi(x)\phi(y) = \phi(x+h)$.

   (b) Réciproquement, si deux réels x et h donnés vérifient $x \in I$ et $x + h \in I$, montrer qu'il existe $y \in I$ tel que $\phi(x)\phi(y) = \phi(x+h)$.
   Préciser y en fonction de x et h, en déduire l'expression de h en fonction de x et y.

   (c) Si x, y et h vérifient les hypothèses des questions précédentes et que $h \neq 0$, montrer que l'on a :

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \frac{\phi(y) - 1}{y} \times \frac{\phi(x)}{1 - x^2} \times (1 + xy)$$

   (d) Montrer que ϕ est dérivable en tout point $x \in I$ (Rappel : ϕ est supposée dérivable en 0). Trouver une équation reliant $\phi(x)$, $\phi'(x)$ et $\phi'(0)$ pour tout $x \in I$.

   (e) Faire le point : qu'a-t-on démontré et que reste-t-il à faire pour répondre au problème posé.

2 Exercices

Exercice 1. *Théorème des accroissements finis généralisés et règle de l'Hospital*

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$$

2. En déduire que si

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

   alors on a :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l.$$

3. Application : déterminer

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}.$$

Exercice 2. *Inverse et puissances d'une matrice*

1. Si $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifier que $CD = DC$ et calculer en fonction de $p \in \mathbb{N}^*$: C^p et D^p.
2. On note $E = C + D$, calculer E^p en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que E est inversible, préciser son inverse.
4. Calculer E^{-p} en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$.