Corrigé du devoir surveillé

1 Sujet standard

Exercice 1. *Théorème de Rolle*

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Le théorème de Rolle affirme que si une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable à l'intérieur $]a;b[$ de cet intervalle vérifie $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in\ ]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit h une application de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I, notons $x_1 < x_2 < ... < x_p$ ces p valeurs où h s'annule. Pour $1 \leq i \leq n-1$, on peut appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ et l'on en déduit qu'il existe $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $h'(y_i) = 0$. Ceci nous donne $p-1$ valeurs distinctes pour lesquelles h' s'annule.
3. On considère les applications a et b de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30}$$

$$b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$$

On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0, +\infty[$. On remarque une primitive particulière de b, notée B :

$$B(x) = 3x^{-50} + x^{-40} + 4x^{-20} + 2x^{-10} + 11$$

En particulier, on remarque que $B(x) = a(x)x^{-30}$. Ainsi, si a s'annule p fois sur $]0, +\infty[$, alors B s'annule aussi p fois sur $]0, +\infty[$ et donc on sait d'après la question précédente que la fonction b s'annule au moins $p-1$ fois sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de l'énoncé entraine que $p - 1 \leq 3$, c'est à dire $p \leq 4$ donc a ne s'annule pas plus de quatre fois.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < ..... < \alpha_n$, $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ un élément de $(\mathbb{R}^*)^n$ et f_n l'application de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k}$$

Démontrons par récurrence sur n que f_n s'annule au plus $n-1$ fois dans $]0, +\infty[$.
Initialisation de la récurrence : pour $n = 1$, une fonction f_1 de la forme $f_1(x) = \lambda_1 x^{\alpha_1}$ où $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$ ne s'annule pas.
Hérédité : Supposons le résultat vrai aux rang n, et considérons une fonction f_{n+1} de la forme : $f_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k}$, qui se factorise en $f_{n+1}(x) = x^{\alpha_1} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k - \alpha_1}$.

Supposons que f_{n+1} s'annule au moins p fois sur $]0,+\infty[$, alors on aura que $g(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k-\alpha_1}$ s'annule au moins p fois aussi, donc sa dérivée $g'(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k(\alpha_k-\alpha_1)x^{\alpha_k-\alpha_1-1}$ s'annule au moins $p-1$ fois.

Comme cette dérivée est une somme de n puissances distinctes de x, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et l'on a $p-1 \leq n-1$ donc $p \leq n$ et la propriété est bien héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure qu'elle est vraie.

5. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ suivant : $P = X^{400} + 7X^{201} - 4X^{101} + 1$. Prouvons que P admet au plus 6 racines réelles : d'après la question précédente, on sait déjà que P s'annule au plus trois fois sur $]0,+\infty[$. Notons $Q = X^{400} + 7X^{201} + 4X^{101} + 1$, $Q(X) = P(-X)$ s'annule aussi au plus trois fois sur $]0,+\infty[$ donc P s'annule au plus trois fois dans $]-\infty,0[$.

   Comme $P(0) \neq 0$, on voit que P s'annule au plus 6 fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Suite récurrente et fonction contractante.*

Soit f une fonction définie sur $[0,4]$ par $f(x) = \sqrt{4+x}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0,4]$ est stable par f, et que f admet un unique point fixe α sur $[0,4]$ que l'on calculera.

   La fonction f est croissante et continue donc $[f(0), f(4)] = \left[2, \sqrt{8}\right]$. Puisque $\left[2, \sqrt{8}\right] \subset [0,4]$, l'intervalle $[0,4]$ est stable par f.

   On cherche à résoudre, pour $x \in [0,4]$, l'équation $\sqrt{4+x} = x$. Elle équivaut, puisque tout est positif pour x dans cet intervalle, à :

$$4 + x = x^2,$$

$$x^2 - x - 4 = 0.$$

   Les deux solutions de cette équation du second degré dans $\mathbb{R}$ sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. L'unique solution dans l'intervalle considéré est donc $\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

2. On commence par remarquer que f est dérivable sur $[0,4]$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$. Cette dérivée est à valeurs positives sur $[0,4]$ et décroissante. Ainsi, pour tout $x \in [0,4]$, on a :

$$|f'(x)| \leq f'(0) = \frac{1}{4}.$$

3. La suite (u_n) est définie par

$$u_0 \in [0,4] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

   Montrer que si $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

   On déduit de la majoration de $|f'|$ que f est $\frac{1}{4}$-lipchitzienne sur $[0,4]$.

   On prouve alors le résultat demandé par récurrence sur n.

   Pour $n = 0$, il est vrai.

   Supposons qu'il soit vérifié au rang n, on a alors puisque f est lipchitzienne :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|.$$

Ceci signifie :

$$|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}\,|u_n-\alpha|\,,$$

d'où l'on déduit par hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha|,$$

$$|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|.$$

Qu'en déduit-on sur le comportement de (u_n) ? (u_n) est donc convergente de limite α.

Exercice 3. *Systèmes à paramètre*

1. Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les solutions du système :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z &=& 1\\ x-2y+2z &=& m\\ x+y-z &=& 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -2y+2z &=& -2 & L_1-3L_3\to L_1\\ -3y+z &=& m-1 & L_2-L_3\to L_2\\ x+y-z &=& 1 & \end{array}\right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -y+z &=& -1 & \frac{1}{2}L_1\to L_1\\ -3y+z &=& m-1 & \\ x+y-z &=& 1 & \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -y+z &=& -1 & \\ -2y &=& m & L_2-L_1\to L_1\\ x+y-z &=& 1 & \end{array}\right.$$

Pour toute valeur de $m \in \mathbb{R}$, le système admet donc pour unique solution le triplet (x,y,z) où $y=-\dfrac{m}{2}$ d'après L_2, $z=-1+\dfrac{m}{2}$ d'après L_1 et $x=m$ d'après L_3.

Finalement, ce sytème admet donc une unique solution $\left(m,-\dfrac{m}{2},-1+\dfrac{m}{2}\right)$.

2. Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{llllll} ax & +(1-a)y & +(1-a)z & = & a^2\\ ax & +(1+a)y & +(1+a)z & = & a-a^2\\ x & +y & +z & = & 1-a \end{array}\right.$$

On fait les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - aL_3$:

$$\left\{\begin{array}{llllll} & (1-2a)y & +(1-2a)z & = & 2a^2-a\\ & y & +z & = & 0\\ x & +y & +z & = & 1-a \end{array}\right.$$

On fait alors $L_1 \leftarrow L_1 + (2a-1)L_2$:

$$\left\{\begin{array}{lllll} & & 0 & = & 2a^2-a\\ & y & +z & = & 0\\ x & & & = & 1-a \end{array}\right.$$

Si $2a^2-a\neq 0$, le système est donc incompatible.
Si $2a^2-a=0$, c'est à dire si $a=0$ ou $a=\frac{1}{2}$, le système est de rang 2 et il y a une inconnue paramètre. L'ensemble des solutions est :

$$\{(1-a,-z,z)|z\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 4. *Puissances d'une matrice.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note $B = A - I_3$, calculer B^2 et B^3.
   $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. Par exemple à l'aide de la formule du binôme (justifier son utilisation), donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.
   On a $A = I_3 + B$ avec B et I_3 qui commutent puisque $I_3 B = B I_3 = B$ donc :
   $$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}.$$
   Comme pour $k \geq 3$, on a $B^k = 0$, on obtient :
   $$A^n = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$
   $$A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2;$$
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 2n - \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Matrices et suites récurrentes*

On considère les matrices :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit PQ. En déduire l'expression de l'inverse de P noté P^{-1}.
   On remarque que $PQ = I_3$ donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = Q$.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est une matrice diagonale que l'on calculera et exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, D^n. Le calcul donne $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'on en déduit : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
   Supposons la propriété vraie au rang n, on a donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Or on sait que $D = P^{-1}AP$ donc $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$. On en déduit :
   $$A^{n+1} = A^n A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$
   Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On fait donc le calcul pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 2-2^n & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

5. On pose $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et on définit par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -a_n + c_n \\ c_{n+1} &= -a_n - b_n + 2c_n \end{cases}$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n la matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ puis que $U_n = A^n U_0$.
On remarque effectivement pour $n \in \mathbb{N}$ que l'on a :

$$AU_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n - c_n \\ -a_n + c_n \\ -a_n - b_n + 2c_n \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

Prouvons ensuite par récurrence que $U_n = A^n U_0$. Pour $n = 0$, c'est évident puisque $A^0 = I_3$. Prouvons l'hérédité, on suppose donc que $U_n = A^n U_0$, on a donc puisque $U_{n+1} = AU_n$:

$$U_{n+1} = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0.$$

Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier.

6. En déduire l'expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 2-2^n & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2-2^n \\ 2-2^n \end{pmatrix}.$$

2 Problème du sujet bis

Première partie

On considère la fonction $f : x \mapsto \left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{\frac{1}{2}}$.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\dfrac{2}{1-x} - 1 = \dfrac{2-(1-x)}{1-x} = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Sur $]1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto 1-x$ est décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$. Sur $\mathbb{R}_-^*$, la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ est décroissante. La composée de ces deux fonctions, $x \mapsto \dfrac{2}{1-x}$ est donc croissante sur $]1, +\infty[$. On en déduit enfin que $x \mapsto \dfrac{2}{1-x} - 1$, et donc g, est décroissante sur $]1, +\infty[$. Pour les mêmes raisons, g est décroissante sur $]-\infty, 1[$.

Dressons le tableau de variations de g :

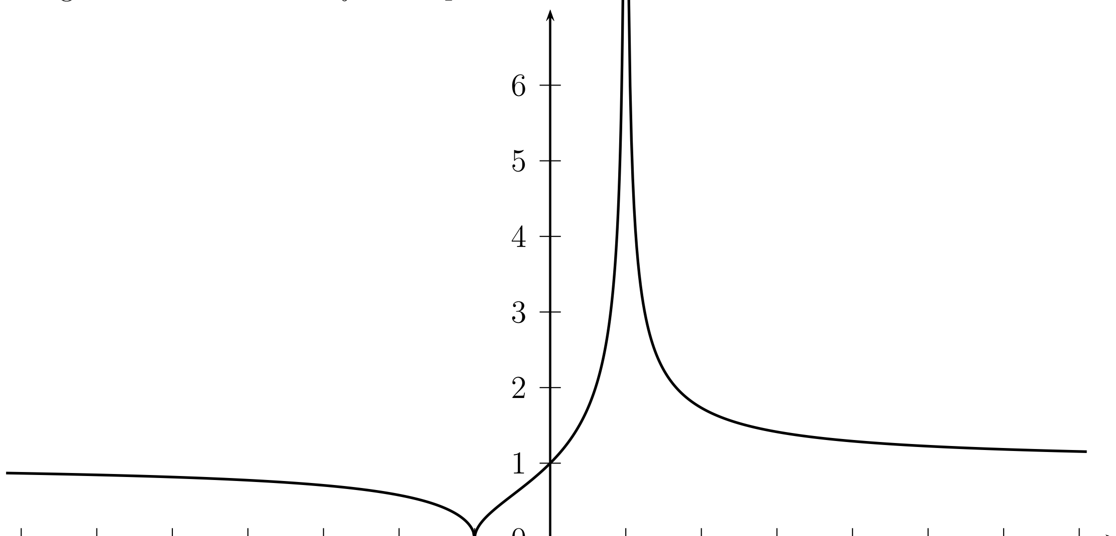
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

On en déduit immédiatement que g est négative sur $]1,+\infty[$, puis comme elle s'annule en -1, que g est négative aussi sur $]-\infty,-1[$ et positive sur $]-1,1[$.

2. f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. En écrivant f comme la composée $f = \sqrt{|g|}$, étudions ses variations. Sur $]1,+\infty[$, on a $f = \sqrt{-g}$ donc f est décroissante puisque $-g$ est décroissante et que la racine carrée est une fonction croissante. Il en est de même sur l'intervalle $]-\infty,-1[$ où f est croissante. Sur $]-1,1[$ enfin, $f = \sqrt{g}$ est croissante :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||	$\searrow$	1

4. Les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ont été précisées dans le tableau de variations ci-dessus.
5. Etudier soigneusement la dérivabilité de f en -1 : calculons donc le taux d'accroissement $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} =$. Si $-1 < x < 1$, on a : $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\tau(x) = \dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$. Le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives quand $x > -1$ et $x \to -1$ donc $\tau(x) \underset{x \to -1^+}{\to} +\infty$: la fonction n'est pas dérivable à droite en -1, elle admet une tangente verticale donc f n'est pas dérivable en -1.



6.

7. Si $(x,y) \in D^2$ vérifient $xy+1 \neq 0$, on a :

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \left|\frac{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right|^{\frac{1}{2}} = f(x)f(y).$$

Deuxième partie

Dans cette partie, on désignera par I l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

1. On fixe $y \in I$ non nul :

$$u(x) = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{xy+y^2}{y(1+xy)} = \frac{1+xy+y^2-1}{y(1+xy)} = \frac{1}{y} + \frac{y-\frac{1}{y}}{1+xy}$$

Si $y>0$, la fonction $x \mapsto 1+xy$ est croissante entre les valeurs $1-y>0$ et $1+y$ sur I, donc $x \mapsto \frac{1}{1+xy}$ est définie et décroissante sur I. Mais si $y \in]0,1[, y < \frac{1}{y}$ donc $y - \frac{1}{y} < 0$ et la fonction u s'avère finalement croissante sur I. Si $y<0$, $x \mapsto 1+xy$ est décroissante entre les valeurs $1-y$ et $1+y$, l'inverse de cette fonction est donc croissant et l'on a pour $y \in]-1,0[$: $\frac{1}{y} < y$ d'où $y - \frac{1}{y} > 0$ et u s'avère croissante aussi dans ce cas là. Si $y=0$, $u(x)=x$ donc u est encore croissante.

x	-1		1
$u(x)$	-1	$\nearrow$	1

On a $u(]-1,1[) =]-1,1[$ puisque l'image d'un intervalle est un intervalle par une fonction continue, et que u est ici strictement monotone, ce qui permet de préciser $u(I)$ directement grâce au tableau de variations ci-dessus.

2. On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions ϕ définies sur I vérifiant les trois propriétés suivantes :
   — ϕ est continue sur I,
   — ϕ est dérivable en 0,
   — $\forall (x,y) \in I^2,\ \phi(x)\phi(y) = \phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

   La fonction nulle est une solution. On suppose dans toute la suite du problème que ϕ est une autre solution.

   (a) Soit $x \in D$ tel que $\phi(x) \neq 0$. On a alors pour $y=0$:

   $$\phi\left(\frac{x+0}{1+x\times 0}\right) = \phi(x)\phi(0)$$

   i.e. $\phi(x) = \phi(x)\phi(0)$ d'où $\phi(0)=1$.

   (b) Pour montrer que ϕ ne s'annule pas, on peut dire que pour $x \in D$, et $y=-x$:

   $$\phi(x)\phi(-x) = \phi\left(\frac{x-x}{1+xy}\right) = \phi(0) = 1.$$

   Donc $\phi(x)$ ne peut être nul.

(c) Le calcul précédent montre aussi que tout $x \in I$ vérifie : $\phi(-x) = \dfrac{1}{\phi(x)}$.

3. (a) Soit $(x,y) \in I^2$. Pour $h = \dfrac{x+y}{1+xy} - x$, on a d'après l'énoncé : $\phi(x)\phi(y) = \phi(x+h)$.

(b) Réciproquement, si deux réels x et h donnés vérifient $x \in I$ et $x+h \in I$, montrons qu'il existe $y \in I$ tel que $\phi(x)\phi(y) = \phi(x+h)$. (Indication : question 2c)
Comme ϕ ne s'annule pas, on a équivalence entre $\phi(x)\phi(y) = \phi(x+h)$ et $\phi(y) = \phi(x+h) \times \frac{1}{\phi(x)}$ ou encore $\phi(y) = \phi(x+h)\phi(-x)$ d'après 2c donc $\phi(y) = \phi\left(\dfrac{x+h-x}{1+(x+h)(-x)}\right)$, i.e. $\phi(y) = \phi\left(\dfrac{h}{1-hx-x^2}\right)$
Préciser y en fonction de x et h, en déduire l'expression de h en fonction de x et y.
Il est donc possible de trouver un tel y, par exemple en posant $y = \dfrac{h}{1-hx-x^2}$.
Si c'est ainsi que y et h sont liés, on peut retrouver h en résolvant $y(1-hx-x^2) = h$ i.e. $y(1-x^2) = h(1+xy)$, ce qui nous donne : $h = \dfrac{y(1-x^2)}{1+xy}$.

(c) Si x, y et h vérifient les hypothèses des questions précédentes et que $h \neq 0$, calculons :

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \frac{\phi(x)\phi(y)-\phi(x)}{h} = \frac{(\phi(y)-1)\phi(x)}{\dfrac{y(1-x^2)}{1+xy}} = \frac{\phi(y)-1}{y} \times \frac{\phi(x)}{1-x^2} \times (1+xy)$$

(d) Montrons que ϕ est dérivable en tout point $x \in I$: on fixe $x \in D$, on pose $y = \dfrac{h}{1-hx-x^2}$ et que l'on fait tendre h vers 0 pour calculer la limite du taux d'accroissement ci-dessus. Puisque $y \underset{h\to 0}{\to} 0$, on a $\dfrac{\phi(y)-1}{y} \underset{h\to 0}{\to} \phi'(0)$. En outre, $\dfrac{\phi(x)}{1-x^2} \times (1+xy) \underset{h\to 0}{\to} \dfrac{\phi(x)}{1-x^2}$. Ainsi, par produit des limites, le taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0 donc ϕ est dérivable en x de dérivée : $\phi'(x) = \phi'(0)\dfrac{\phi(x)}{1-x^2}$.

(e) On a donc avancé dans l'analyse du problème et prouvé que si ϕ est une fonction non identiquement nulle répondant au problème posé, ϕ ne s'annule pas et vérifie pour une certaine constante $K \in \mathbb{R}$:
$\phi'(x) = K\dfrac{\phi(x)}{1-x^2}$, c'est à dire $\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \dfrac{K}{1-x^2}$.
Or $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{K}{1-x^2}$ est donc $x \mapsto \frac{K}{2}(-\ln(1-x) + \ln(1+x))$. On en déduit qu'il existe une constante K' telle que : $\forall x \in D, \ln(|\phi(x)|) = K' + \frac{K}{2}(-\ln(1-x) + \ln(1+x))$. On sait donc que $|\phi(x)| = e^{K'}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{K}{2}}$ pour un couple K, K'. de réels. Toute solution est donc de la forme $x \mapsto \lambda\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\mu}$. Comme $\phi(0) = 1$, on doit avoir $\lambda = 1$ ce qui restreint les solutions possibles aux fonctions de la forme $x \mapsto \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\mu}$

Passons enfin à la synthèse : toute fonction de la forme $x \mapsto \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\mu} = f(x)^{\frac{\mu}{2}}$ est une solution car f en est une, c'est celle du début du problème. Et nous venons de voir qu'une fonction solution de notre problème est nécessairement de cette forme, à l'exception de la solution nulle.

3 Exercices du sujet bis

Exercice 6. *Théorème des accroissements finis généralisés et règle de l'Hospital*

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$g'(c)\big(f(b)-f(a)\big) = f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)$$

   On introduit la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $F : x \mapsto (f(b)-f(a))\,g(x) - (g(b)-g(a))\,f(x)$. On remarque que :

$$F(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a);$$

$$F(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

   F est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ de dérivée :

$$F'(x) = (f(b)-f(a))\,g'(x) - (g(b)-g(a))\,f'(x).$$

   Puisque $F(b) = F(a)$, on peut appliquer le théorème de Rolle, et on a $c \in]a,b[$ tel que :

$$(f(b)-f(a))\,g'(c) - (g(b)-g(a))\,f'(c) = 0.$$

2. En déduire que si $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.
   Si $x > a$, on a en effet d'après la question précédente $c_x \in]a,x[$ tel que

$$g'(c_x)\big(f(x)-f(a)\big) = f'(c_x)\big(g(x)-g(a)\big).$$

   Puisque $a \leq c_x \leq x$, on remarque que $\lim_{x\to a^+} c_x = x$ donc $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$. Ainsi, pour x assez proche de a, $g'(c_x) \neq 0$ (sous-entendu par l'existence d'une limite) et l'on peut écrire :

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

   On en déduit $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.

3. Application : déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.
   On note $f(x) = \cos x - e^x$ et $g(x) = (x+1)e^x - 1$. On remarque que $f(0) = g(0) = 0$. Or f et g sont dérivables de dérivées $f'(x) = -\sin x - e^x$ et $g'(x) = (x+2)e^x$. Ainsi, on a $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 7. *Inverse et puissances d'une matrice*

1. Si $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifier que $CD = DC$ et calculer en fonction de $p \in \mathbb{N}^*$: C^p et D^p.
   Comme $D = 3I_3$, on a $CD = DC = 3C$.
   La matrice D étant diagonale, on a $D^p = \begin{pmatrix} 3^p & 0 & 0 \\ 0 & 3^p & 0 \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix}$ ou encore $D^p = 3^p I_3$, cette formule étant aussi valable pour $p = 0$.
   Concernant C, on remarque que $C^2 = 6C$ donc on prouve aisément par récurrence que l'on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $C^p = 6^{p-1}C$.
2. On note $E = C + D$, calculer E^p en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule du binôme :
$$(C+D)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} C^k D^{p-k}$$
$$(C+D)^p = D^p + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 6^{k-1} C 3^{p-k} I_3$$
$$(C+D)^p = 3^p I_3 + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 6^{k-1} 3^{p-k} \right) C$$
$$(C+D)^p = 3^p I_3 + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 6^{k} 3^{p-k} \right) C$$
$$(C+D)^p = 3^p I_3 + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 6^{k} 3^{p-k} - 3^p \right) C$$
$$(C+D)^p = 3^p I_3 + \frac{1}{6} \left((6+3)^p - 3^p \right) C$$
$$(C+D)^p = 3^p I_3 + \frac{1}{6} \left(9^p - 3^p \right) C$$
   Concrètement, cela donne : $E^p = \begin{pmatrix} \frac{9^p+5\times3^p}{6} & \frac{9^p-3^p}{6} & \frac{9^p-3^p}{6} \\ \frac{9^p-3^p}{6} & \frac{9^p+5\times3^p}{6} & \frac{9^p-3^p}{6} \\ \frac{9^p-3^p}{6} & \frac{9^p-3^p}{6} & \frac{9^p+5\times3^p}{6} \end{pmatrix}$.
3. Montrer que E est inversible, préciser son inverse : on peut remarquer que la formule ci-dessus fonctionne aussi pour $p = 0$ et deviner qu'elle va fonctionner pour $p = -1$. Il reste alors simplement à vérifier que la matrice ainsi obtenue, $\frac{1}{3}I_3 - \frac{1}{27}C$, est bien l'inverse de $E = C + 3I_3$ en calculant : $\left(\frac{1}{3}I_3 - \frac{1}{27}C\right)(C + 3I_3) = \frac{1}{3}C + I_3 - \frac{1}{27}C^2 - \frac{1}{9}C = I_3 + (\frac{1}{3} - \frac{6}{27} - \frac{1}{9})C = I_3$.
   Finalement, E est inversible d'inverse $E^{-1} = \frac{1}{3}I_3 - \frac{1}{27}C$
4. Calculer E^{-p} en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$: il suffit de prouver par récurrence sur p que l'on a $E^{-p} = 3^{-p}I_3 + \dfrac{1}{6}\left(9^{-p} - 3^{-p}\right)C$.