# Devoir surveillé

## Cours

1. Division euclidienne d'un élément $A$ de $\mathbb{K}[X]$ par un élément $B$ de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
2. Définition d'une racine $\alpha \in \mathbb{K}$ d'un polynôme et caractérisation par une divisibilité.
3. Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Formule de Taylor-Young.
5. **Propriétés de calcul dans un e.v. : savoir prouver que** $0x = 0_E$ **si** $x \in E$, $\lambda 0_E = 0_E$ **si** $\lambda \in \mathbb{K}$ **et que** $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ **ou** $x = 0_E$**.**
6. Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : donner deux caractérisations.
7. Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs : préciser ce dont il s'agit.

## Devoir

**Exercice 1.** *Développements limités*

1. Calculer les développements limités suivants en 0 :

   **a)** $\cos(x) - e^x$ à l'ordre 3 **b)** $1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7$ à l'ordre 3
   **c)** $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 3 **d)** $(1+x)^x$ à l'ordre 4.

2. Calculer les développements limités suivants :

   **a)** $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2 **b)** $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 3 en $-2$

**Exercice 2.** *Factorisation d'un polynôme.*

On cherche dans cet exercice à factoriser le polynôme suivant :

$$Q(X) = X^6 - 6X^5 + 13X^4 - 14X^3 + 12X^2 - 8X$$

1. Montrer que 2 est une racine de $Q$, préciser sa multiplicité.
2. Donner une autre racine évidente de $Q$.
3. Factoriser $Q$ au maximum dans $\mathbb{R}[X]$, puis $\mathbb{C}[X]$.

**Exercice 3.** *Développements limités et étude de fonctions.*

1. On désigne par $f$ la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f\ :\ x\in\mathbb{R}\quad\mapsto\quad\begin{cases}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right) & \text{si}\quad x\neq 0\\[2ex] -\ln 2 & \text{si}\quad x=0\end{cases}$$

   (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x\mapsto\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$.

   (b) Peut-on déduire du développement limité de la question précédente, <u>sans nouveaux calculs</u>, que :
   — $f$ est continue en 0 ?
   — $f$ est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$ ?
   — $f$ est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$ ?
   ( justifier avec soin les réponses )

   (c) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

2. On note $g$ la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

   (a) Donner la limite de $g$ en $+\infty$, l'asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$, et la position de la courbe par rapport à son asymptote.

   (b) Préciser l'autre asymptote de la courbe $\mathcal{C}_g$.

**Exercice 4.** *Familles libres*

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(4,1,4)$ et $v_3=(2,-1,4)$.

1. Montrer que la famille $(v_1,v_2)$ est libre. Faire de même pour $(v_1,v_3)$, puis pour $(v_2,v_3)$.
2. La famille $(v_1,v_2,v_3)$ est-elle libre ?

**Exercice 5.** *Espace vectoriel engendré*

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les deux vecteurs $u_1=(1,2,3,4)$ et $u_2=(1,-2,3,-4)$.

1. Peut-on choisir $x$ et $y$ deux réels de sorte que $(x,1,y,1)\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ ?
2. Peut-on choisir $x$ et $y$ deux réels de sorte que $(x,1,1,y)\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ ?