Devoir surveillé

1 Application des développements limités à l'étude d'une suite récurrente

On s'intéresse dans cette partie du devoir à la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$$

1. On va montrer dans cette première question que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ce quelle que soit la valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
   (a) Etudier complètement la suite u lorsque $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Déduire de la question précédente le comportement de la suite u quand $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
   (c) Montrer enfin que si $u_0 \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. On suppose désormais, et ce pendant toute la suite de cet exercice, que $u_1 > 0$. Montrer que l'on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
3. Soit $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

   A l'aide d'un développement limité du sinus à l'ordre 3, montrer que l'on peut prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue en 0 et préciser $\tilde{f}(0)$.
4. On définit la suite v_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

   (a) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$
   (b) On rappelle le résultat suivant vu en exercice et connu sous le nom de théorème de Césaro ; si une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors on a également :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} w_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

   En déduire un équivalent simple de $\sum\limits_{i=0}^{n-1} v_i$
   (c) Calculer alors $\sum\limits_{i=0}^{n-1} v_i$, et donner un équivalent de $\dfrac{1}{u_n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (d) Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Développements limités, asymptotiques

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f \ : \ x \in \mathbb{R} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2.1 Etude de f en 0

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.
2. Peut-on déduire du développement limité de la question précédente, <u>sans nouveaux calculs</u>, que :
   — f est continue en 0 ?
   — f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
   — f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?
   (justifier avec soin les réponses)
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.2 Développement asymptotique d'une suite

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, on la notera x_n.
2. Déterminer le sens de variations de la suite (x_n) ainsi définie, et sa limite.
3. Montrer, à l'aide de l'équation $f(x_n) = n$, que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} -n$.
4. On définit la suite $y_n = n - x_n$ de sorte que $x_n = -n + y_n$ où $y_n \underset{n\to\infty}{=} o(n)$. A l'aide de l'équation vérifiée par x_n, montrer d'abord que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, puis trouver un équivalent de y_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Plus difficile : donner un terme supplémentaire du développement asymptotique de (x_n).

3 Espaces vectoriels

3.1 Inclusion, sommes et réunions de sous-espaces vectoriels.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Longleftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que

$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

3.2 Une famille libre

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ des complexes distincts et l'on note pour $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ \ , \ \ \phi_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}.$$

Montrer que la famille $(\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \cdots, \phi_{\alpha_n})$ est libre.