Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Développements limités*

1. Calculer les développements limités suivants en 0 :

$$\textbf{a)}\ \cos(x) - e^x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) - e^x \underset{x\to 0}{=} -x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\textbf{b)}\ 1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - 3x^3 + o(x^3)$$

$$\textbf{c)}\ \ln(\cos(x))$$

On commence par écrire :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

On écrit alors le développement limité du ln en 1 :

$$\ln(1+y) \underset{y\to 0}{=} y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Pour $y(x) = \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, on a donc $y(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $y(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ d'où :

$$\ln(1+y(x)) \underset{x\to 0}{=} y(x) - \frac{y(x)^2}{2} + o(x^4)$$

$$\ln(1+y(x)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\textbf{d)}\ (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$$

Or $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))$.
On pose alors $y(x) = x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2))$ et l'on a :

$$y^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^4 + o(x^4)$$

On obtient alors par composition :

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

2. Calculer les développements limités suivants :

$$\textbf{a)}\ \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en 2}$$

On pose $x = 2 + h$ et l'on se ramène ainsi au développement limité en 0 de :

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{h}{2}}$$

Or $\sqrt{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3+o(y^3)$, d'où :

$$\sqrt{2+h} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4}h-\frac{1}{32}h^2+\frac{1}{128}h^3+o(h^3)\right)$$

$$\sqrt{2+h} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}h-\frac{\sqrt{2}}{32}h^2+\frac{\sqrt{2}}{128}h^3+o(h^3)$$

b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 3 en -2

On pose $x=-2+h$ et l'on se ramène au développement limité en 0 de :

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2}=\frac{1}{5-4h+h^2}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{4}{5}h+\frac{1}{5}h^2}$$

On rappelle que $\frac{1}{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1-y+y^2-y^3+o(y^3)$, on en déduit avec $y(h)=-\frac{4}{5}h+\frac{1}{5}h^2$:

$$y^2(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{16}{25}h^2-\frac{8}{25}h^3+o(h^3)$$

$$y^3(h) \underset{h\to 0}{=} -\frac{64}{125}h^3+o(h^3)$$

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5}\left(1+\frac{4}{5}h-\frac{1}{5}h^2+\frac{16}{25}h^2-\frac{8}{25}h^3+\frac{64}{125}h^3+o(h^3)\right)$$

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5}+\frac{4}{25}h+\frac{11}{125}h^2+\frac{24}{625}h^3+o(h^3)$$

Exercice 2. *Factorisation d'un polynôme.*

On cherche dans cet exercice à factoriser le polynôme suivant :

$$Q(X)=X^6-6X^5+13X^4-14X^3+12X^2-8X$$

1. Montrer que 2 est une racine de Q, préciser sa multiplicité.
   On calcule : $Q(2)=0$ donc 2 est racine de Q de multiplicité au moins 1.
   $$Q'(X)=6X^5-30X^4+52X^3-42X^2+24X-8.$$
   $Q'(2)=0$ donc 2 est racine de multiplicité au moins 2.
   $$Q^{(2)}(X)=30X^4-120X^3+156X^2-84X+24.$$
   $Q^{(2)}(2)=0$ donc 2 est racine de multiplicité au moins 3.
   $$Q^{(3)}(X)=120X^3-360X^2+312X-84.$$
   $Q^{(3)}(2)=60$ et la multiplicité de 2 comme racine de Q est donc 3.
2. Donner une autre racine évidente de Q.
   0 est une racine évidente de Q.
3. Factoriser Q au maximum dans $\mathbb{R}[X]$, puis $\mathbb{C}[X]$.
   En divisant Q par $X(X-2)^3=X^4-6X^3+12X^2-8X$, on obtient :
   $$Q(X)=X(X-2)^3(X^2+1).$$
   Ceci est la décomposition de Q en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, et peut encore se décomposer dans $\mathbb{C}[X]$:
   $$Q(X)=X(X-2)^3(X+i)(X-i).$$

Exercice 3. *Développements limités et étude de fonctions.*

1. On désigne par f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f \,:\, x\in\mathbb{R} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ \\ -\ln 2 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

(a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x\mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$.
On rappelle que $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$.

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x^2+o(x^2).$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x^2+o(x^2)\right).$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\right).$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\ln(2)+\ln\left(1-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right).$$

On rappelle alors que $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{=} y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$, que l'on applique avec :

$$y(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2);$$

$$y^2(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{16}x^2+o(x^2).$$

On obtient donc en combinant avec le DL de ln :

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\ln(2)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{32}x^2+o(x^2);$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\ln(2)-\frac{1}{4}x+\frac{3}{32}x^2+o(x^2).$$

(b) Peut-on déduire du développement limité de la question précédente, <u>sans nouveaux calculs</u>, que :

— f est continue en 0 ?
Oui, on en déduit que $f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} -\ln(2)$, ce qui est bien la valeur de $f(0)$ donc f est continue en 0.

— f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
Oui, puisque f admet en 0 un développement limité à l'ordre 1, on peut en déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\frac{1}{4}$.

— f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?
Non, la dérivabilité (et même la continuité) de f' en 0 n'est pas garantie par l'existence d'un développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée :

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{1+x}}-\sqrt{1+x}+1}{x^2}\times\frac{x}{\sqrt{1+x}-1};$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{1+x}} - \sqrt{1+x} + 1}{x(\sqrt{1+x} - 1)};$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2} - 1 - x + \sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - 1)};$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - 1)}.$$

Or on sait que $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ donc $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{8}x^2$. On a également $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + o(x)$ d'où $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$. On déduit de tout cela que $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{8}x^2}{\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{4}$. Ainsi, $f'(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} -\frac{1}{4} = f'(0)$, et f' est continue en 0 donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

2. On note g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

(a) Donner la limite de g en $+\infty$, l'asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$, et la position de la courbe par rapport à son asymptote. On calcule pour $x > 0$:

$$g(x) = \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}};$$

$$g(x) = x\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}.$$

On en déduit que $g(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour $t > 0$, on a :

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \times \frac{1 + t^2}{\sqrt{1 + t + t^2}};$$

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \times (1 + t^2)(1 + t + t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or $(1+y)^{-\frac{1}{2}} \underset{y\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + o(y^2)$ d'où avec $y(t) = t + t^2$, $y^2(t) \underset{t\to 0}{=} t^2 + o(t^2)$ et :

$$g\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t} \times (1 + t^2)\left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2)\right);$$

$$g\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t} \times (1 + t^2)\left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)\right);$$

$$g\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t} \times \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + t^2 + o(t^2)\right);$$

$$g\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{7}{8}t + o(t).$$

On en déduit enfin, en posant $t = \frac{1}{x}$:

$$g(x) \underset{x\to +\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \frac{7}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ceci signifie que $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote de $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$, et comme $\frac{7}{8x}$ est de signe positif pour $x \to +\infty$, $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

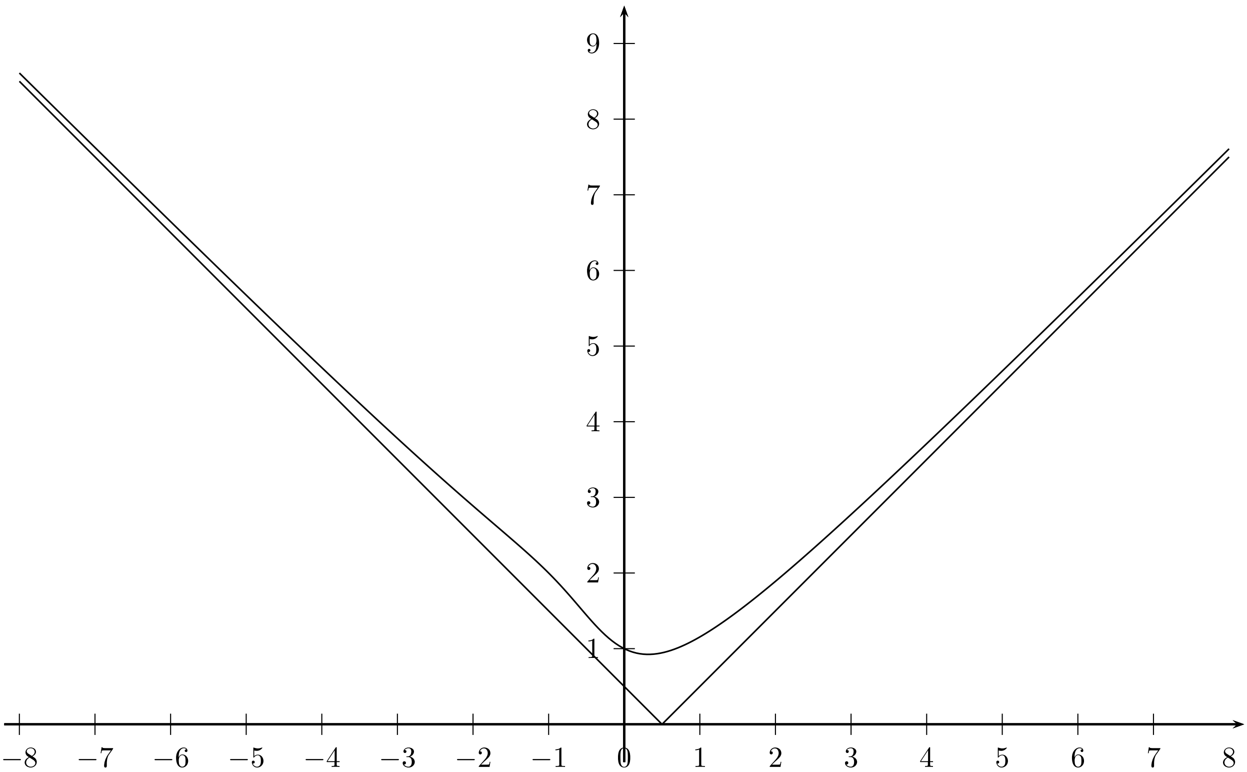
(b) La seule différence lorsque l'on fait les calculs avec des nombres $x < 0$ est que :

$$\sqrt{x^2+x+1} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Ainsi, on obtient en reprenant les calculs précédents :

$$g(x) \underset{x\to-\infty}{=} -x+\frac{1}{2}-\frac{7}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

L'asymptote en $-\infty$ a pour équation $y = -x+\frac{1}{2}$ et elle est encore située au dessus de $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $-\infty$ car pour $x \to -\infty$, on a $-\frac{7}{8x} > 0$.



Exercice 4. *Familles libres*

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3), puis pour (v_2, v_3).
   Pour justifier la liberté de chacune de ces trois familles, il suffit de rappeler qu'une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires. En analysant chacune des trois familles, on observe ainsi qu'elles sont libres.
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
   Pour répondre à cette question, il suffit de déterminer l'ensemble des solutions $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, c'est à dire du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+4y+2z & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \\ 4y+4z & = & 0 \end{array}\right.$ La dernière

équation équivaut à $z=-y$ et lorsque l'on remplace alors z dans les deux premières équations, on obtient $x+2y=0$ et $x+2y=0$. Si l'on choisit alors $y=1$, $z=-1$ et $x=-2$, on observe que c'est une solution du système donc $-2v_1+v_2-v_3=0$ et la famille est liée.

Exercice 5. *Espace vectoriel engendré*

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les deux vecteurs $u_1=(1,2,3,4)$ et $u_2=(1,-2,3,-4)$.

1. $(x,1,y,1)\in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ équivaut à :

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda u_1+\mu u_2=(x,1,y,1)$$

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu&=&x\\2\lambda-2\mu&=&1\\3\lambda+3\mu&=&y\\4\lambda-4\mu&=&1\end{array}\right.$$

Il suffit alors d'observer que la deuxième et la quatrième équation sont incompatibles, pour conclure qu'il n'y a pas de solution (λ,μ) à ce système, et donc que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,1,y,1)\notin\mathrm{Vect}(u_1,u_2).$$

2. $(x,1,1,y)\in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ équivaut à :

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda u_1+\mu u_2=(x,1,y,1)$$

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu&=&x\\2\lambda-2\mu&=&1\\3\lambda+3\mu&=&1\\4\lambda-4\mu&=&y\end{array}\right.$$

En résolvant le système constitué de la deuxième et la troisième équation, on trouve une unique solution possible au système : $\lambda=\frac{5}{12}$ et $\mu=-\frac{1}{12}$. Mais il faut aussi, pour que le système admette une solution, que la première et la quatrième équation soient vérifiées par ce couple (λ,μ) solution des deux autres. Ainsi, on a bien $(x,1,1,y)\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ si et seulement si $x=\frac{1}{3}$ et $y=2$.