Devoir surveillé du concours blanc

1 Une équation dans l'espace des polynômes complexes

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ solution de l'équation :

$$(E) \ \ P(X^2-1) = P(X+1)P(X-1).$$

Le polynôme $P = 0$ est une solution évidente du problème, on suppose dans toute cette partie que le polynôme $P \neq 0$ est une solution de (E).

1. Quelles sont les solutions constantes de l'équation (E) ?
2. On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence (R) :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n.$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.
   (b) Montrer que, si a_0 est un réel strictement positif, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels.
3. Montrer que, si a est une racine de P, alors $(a+1)^2 - 1$ et $(a-1)^2 - 1$ sont racines de P.
4. On suppose maintenant que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes qui satisfait la relation (R) et que a_0 est racine de P.
   (a) Montrer que a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer qu'il existe n et m deux rangs distincts tels que $a_n = a_m$ et en déduire que $|a_0 + 1| = 1$ si $a_0 \neq -1$.
   (c) On suppose que a_0 est un réel strictement positif. Obtenir une contradiction et en déduire que P n'admet aucune racine réelle strictement positive.
   (d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.
5. Montrer que, si a est racine de P, alors $|a + 1| = 1$. On montrerait de même que $|a - 1| = 1$. En déduire que si P a une racine, cette racine est nulle.
6. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (E) ?

2 Matrices et applications linéaires

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commmutent avec leur transposée, c'est à dire qui vérifient la relation $M\,{}^tM = {}^tMM$ (1).
Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire que M vérifie la relation (1).

Première partie

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On notera en particulier : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1).
2. Calculer A^2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.
   Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est A.
4. Préciser les valeurs de $u(\vec{i})$ et $u(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble de ses vecteurs invariants.
   Dans la suite, on notera $U = A + I$.

5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_n \in \mathbb{R}, U^n = \alpha_n U$.
   En déduire que toute ses puissances U^n, $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1).
   On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient (1).
6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.
   En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2.
8. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels dont on donnera pour chacun une base.
9. Etant données M et N deux matrices de E_2, a-t-on nécessairement $MN \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

Deuxième partie

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h(\vec{j}) = \vec{i}$ et $h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = Mat_{B'}(h)$.
L'ensemble des matrtices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_3.

10. Représenter la matrice S.
11. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.
12. Montrer que pour tous réels a, b et c, la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3.
13. En déduire que E_3 contient un sous-espace vectoriel de dimension 3 constitué de matrices du type décrit à la question précédente. On notera F ce sous-espace.
14. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

Troisième partie

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $B'' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$.

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $Mat_{B''}(u) = B$.
L'ensemble des matrtices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_4.

15. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.
    Dans toute la suite, on pose $a = -1$.
16. Déterminer une base de Ker (u) et de Im (u).
17. Calculer $u(\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} - \vec{e_4})$. Que remarque-t-on ?
18. Calculer $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu.
19. On note $C = (\vec{e_2} + \vec{e_3}, \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} - \vec{e_4}, \vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3} - \vec{e_4})$ et on admet sans démonstration que C est une base de $\mathbb{R}^4$.
    Déduire des questions précédentes $Mat_C(u)$.
    En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale. On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1}.
20. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et B^2.