Devoir surveillé

Exercice 1. *Une application linéaire sur un espace de matrices*

Dans cet exercice, le corps de base est noté $\mathbb{K}$, pouvant désigner indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ deux éléments de E. On munit E de sa base canonique :

$$\mathcal{C} = \left(E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit enfin u l'endomorphisme de E défini par :

$$u : E \longrightarrow E$$

$$u : M \longmapsto AM - MB$$

1. Calculer la matrice $F \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ de u dans la base canonique e de E.
2. Montrer que u est l'application linéaire nulle si et seulement si :

$$\exists a \in \mathbb{K}, \ \ A = B = aI_2$$

Exercice 2. *Etude d'un endomorphisme nilpotent à l'aide de changements de bases*

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ et l'on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$.
   (b) Calculer $(I_3 - M)(I_3 + M + M^2)$, en déduire que $I_3 - M$ est inversible et préciser son inverse.
2. (a) Quelle est la dimension du noyau de u ? Quel est le rang de u ?
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} u^2$, alors la famille $(x, u(x), u^2(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire concernant la famille $(x, -u(x), u^2(x))$ quand $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} u^2$?
3. On pose $e'_1 = u^2(e_3)$, $e'_2 = -u(e_3)$ et $e'3 = e_3$.
   (a) Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice de passage P de la base e à la base e'.
   (b) Calculer P^2 et en déduire P^{-1}.
   (c) Préciser la matrice M' de u dans la base e'.
   (d) On désigne par σ l'endomorphisme dont la matrice dans la base e est P. Indiquer à quel type particulier d'endomorphismes appartient σ ainsi que les sous-espaces qui lui sont associés.

(e) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de σ est :

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Dénombrements*

1. Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle veut en inviter cinq à dîner.
   (a) Combien de groupes différents d'invités existe-t-il ?
   (b) Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble ?
   (c) Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux sont en mauvais termes et ne veulent plus se voir ?
2. Dans une classe de dix élèves, de combien de façons peut-on choisir trois élèves pour tenir les rôles de Cléante, Valère et Harpagon ?
3. Sur une feuille quadrillée, on a dessiné un rectangle de 10 carrés de long et de 6 carrés de large. En se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut en suivant les lignes du quadrillage, combien y a-t-il de chemins pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du rectangle ?
4. Anagrammes.
   Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, BANANA.
5. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Le jeu est constitué de 8 coeurs, 8 piques, 8 trêfles et 8 carreaux de hauteurs 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As.
   Combien de tirages différents peut-on obtenir :
   (a) sans imposer de contraintes sur les cartes ;
   (b) contenant 5 carreaux ou 5 piques ;
   (c) contenant 2 carreaux et 3 piques ;
   (d) contenant au moins un roi ;
   (e) contenant au plus un roi ;
   (f) contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques (le roi de pique peut en faire partie).

Exercice 4. *Noyau et Image d'une matrice*

On considère cette matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base du noyau de la matrice A.
2. Rappeler le théorème du rang pour une matrice et en déduire le rang de A.
3. Donner une base de l'image de cette matrice.