

Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Une application linéaire sur un espace de matrices*

Dans cet exercice, le corps de base est noté \mathbb{K} , pouvant désigner indifféremment \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ deux éléments de E . On munit E de sa base canonique :

$$\mathcal{C} = \left(E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit enfin u l'endomorphisme de E défini par :

$$u : E \longrightarrow E$$

$$u : M \longmapsto AM - MB$$

- Calculons la matrice $F \in \mathcal{M}_4(K)$ de u dans la base canonique e de E .

$$u(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$u(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a - e & -f \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule de même :

$$u(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g & a - h \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$u(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d - e & -f \end{pmatrix}$$

$$u(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -g & d - h \end{pmatrix}$$

On obtient enfin :

$$F = \begin{pmatrix} a - e & -g & b & 0 \\ -f & a - h & 0 & b \\ c & 0 & d - e & -g \\ 0 & c & -f & d - h \end{pmatrix}$$

- u est l'application linéaire nulle si et seulement si tous les coefficients de sa matrice sont nuls. On voit alors que les termes b, c, f, g sont tous nuls. Grâce à la diagonale de la matrice de f , on obtient $a = e = h = d$. On obtient finalement $A = B = aI_2$.

Exercice 2. *Etude d'un endomorphisme nilpotent à l'aide de changements de bases*

On munit \mathbb{R}^3 de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ et l'on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculons $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie aisément que $M^3 = 0$.

(b) Calculons $(I_3 - M)(I_3 + M + M^2) = I_3 + M + M^2 - M - M^2 - M^3 = I_3$. $I_3 - M$ est donc inversible avec comme inverse $(I_3 + M + M^2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Le rang de u est le rang de M . On observe que les colonnes de M ne sont pas colinéaires, ceci signifie que le rang de M est au moins 2. Le rang de u peut donc être 2 ou 3. Si c'était 3, M serait inversible et u serait un isomorphisme. On ne pourrait alors avoir $M^2 = 0$ donc le rang de u est forcément 2. On en déduit d'après le théorème du rang que le noyau de u est de dimension 1.

(b) Montrons que si $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } u^2$, alors la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est libre :

Soient $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda x + \mu u(x) + \nu u^2(x) = 0$, on obtient en composant cette relation par u^2

$$\lambda u^2(x) + \mu u^3(x) + \nu u^4(x) = 0$$

donc $\lambda u^2(x) = 0$ (puisque $u^3 = u^4 = 0$) ce qui entraîne $\lambda = 0$. On peut alors composer la relation $\mu u(x) + \nu u^2(x) = 0$ par u pour montrer que $\mu = 0$ d'où l'on déduit enfin $\nu = 0$.

La famille $(x, -u(x), u^2(x))$ est donc libre quand $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } u^2$, c'est alors une base de \mathbb{R}^3 puisque son cardinal est 3.

3. On pose $e'_1 = u^2(e_3)$, $e'_2 = -u(e_3)$ et $e'_3 = e_3$.

(a) D'après la question précédente, la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 à condition que $u^2(e_3) \neq 0$. Or $u^2(e_3) = e_1 - 2e_2 + e_3 \neq 0$ d'après le calcul de M^2 . La matrice de passage P de la base e à la base e' donne simplement les coordonnées des trois

vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base canonique : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) En calculant, on obtient $P^2 = I_3$ d'où l'on déduit que P est inversible et que $P^{-1} = P$.

(c) Les formules de changement de base permettent de calculer la matrice M' de u dans

la base e' : $M' = P^{-1}MP = PMP$. On trouve finalement $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) On désigne par σ l'endomorphisme dont la matrice dans la base e est P . Puisque $P^2 = I_3$, on a $\sigma^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$ donc σ est une symétrie. En remarquant que $P - I_3 =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que son noyau est le sous espace dont une base est $(e_1 - e_2, e_3)$.

En calculant $P + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on remarque que son noyau est la droite vectorielle dirigée par $e_3 - 2e_2$.

Ainsi, σ est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(e_1 - e_2, e_3)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_3 - 2e_2)$.

(e) Dans la base $(e_1 - e_2, e_3, e_3 - 2e_2)$ de \mathbb{R}^3 , la matrice de σ est :

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Dénombrements

1. Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle veut en inviter cinq à dîner.

(a) Combien de groupes différents d'invités existe-t-il ?

Ce nombre de groupes d'invités est :

$$\binom{11}{5} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 462$$

(b) Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble ?

Soit elle les invite, et elle doit alors choisir 3 autres invités parmi les 9 restant. Ou elle ne les invite pas, et il faut donc qu'elle choisisse 5 invités parmi les 9 autres. Donc le nombre de groupes possibles est :

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{5} = 84 + 126 = 210.$$

(c) Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux sont en mauvais termes et ne veulent plus se voir ?

Soit elle n'invite aucun des deux, et doit choisir 5 invités parmi les 9 autres, ou bien elle invite l'un des deux au choix avec un groupe de 4 invités parmi les 9 autres. Le nombre de groupes d'invités est alors :

$$\binom{9}{5} + 2 \times \binom{9}{4} = 3 \binom{9}{4} = 378.$$

2. Dans une classe de dix élèves, de combien de façons peut-on choisir trois élèves pour tenir les rôles de Cléante, Valère et Harpagon ?

Dans ce cas, il s'agit de choisir 3 élèves dans un certain ordre, ce nombre est donc :

$$A_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

3. Sur une feuille quadrillée, on a dessiné un rectangle de 10 carrés de long et de 6 carrés de large. En se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut en suivant les lignes du quadrillage, combien y a-t-il de chemins pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du rectangle ?

Un chemin sera toujours constitué de 16 mouvements successifs, disons 6 vers la droite et 10 vers le haut si la largeur du rectangle est horizontale et la longueur verticale. Parmi ces 16 mouvements successifs, il faut donc choisir les 6 vers la droite pour définir un chemin, les autres étant vers le haut. Ainsi, on a $\binom{16}{6} = 8008$ tels chemins.

4. Anagrammes.

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, BANANA.

Les 5 lettres du mot MATHS étant toutes distinctes, il y a donc autant d'anagrammes de MATHS que de permutations d'un ensemble à 5 éléments, soit $5! = 120$ possibilités.

Pour le mot RIRE, on aurait $4! = 24$ permutations possibles si les deux R étaient des lettres distinctes. Chaque anagramme de RIRE est alors compté deux fois par ce dénombrement, on a donc $\frac{4!}{2} = 12$ anagrammes de RIRE.

Concernant le mot BANANA, pour en choisir un anagramme, on choisit l'emplacement de la lettre B (6 possibilités) puis on place les deux N parmi les 5 places restantes ($\binom{5}{2} = 10$ possibilités) et les trois A vont dans les trois emplacements vides. On a donc 60 anagrammes de ce mot.

5. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Le jeu est constitué de 8 coeurs, 8 piques, 8 trèfles et 8 carreaux de hauteurs 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As.

Combien de tirages différents peut-on obtenir :

- sans imposer de contraintes sur les cartes : il s'agit d'une combinaison $\binom{32}{5}$;
- contenant 5 carreaux ou 5 piques : il s'agit de combinaisons parmi les 8 piques ou les 8 carreaux donc $2\binom{8}{5}$;
- contenant 2 carreaux et 3 piques : là, on effectue indépendamment le choix des 2 carreaux et des 3 piques pour dénombrer, on obtient donc le produit de combinaisons $\binom{8}{2}\binom{8}{3}$.
- contenant au moins un roi : ici, il est plus simple de considérer les tirages sans roi qui sont au nombre de $\binom{28}{5}$, donc le nombre cherché vaut $\binom{32}{5} - \binom{28}{5}$;
- contenant au plus un roi : on ajoute le nombre de tirages avec un roi exactement, et ceux sans roi : $4\binom{28}{4} + \binom{28}{5}$;
- contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques (le roi de pique peut en faire partie) :
 - sans le roi de pique, on a $\binom{3}{2}\binom{7}{3}$ possibilités puisqu'il faut choisir 2 rois parmi les 3 autres et 3 piques parmi les 7 autres.
 - avec le roi de pique, on a $3\binom{7}{2}21$ possibilités puisqu'il faut choisir un autre roi parmi les 3 autres, 2 piques parmi les 7 autres et l'une des 21 cartes qui n'est ni un pique ni un roi.Au total, on finalement $3\binom{7}{3} + 3\binom{7}{2}21$ possibilités.