Devoir surveillé

1 Variables aléatoires

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

1.1 Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
5. En déduire $E(Y)$.

1.2 Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1}=1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$
   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

2 Exercices

Exercice 1. *Quelques convergences*

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = n\sin(1/n)$ **2.** $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$ **3.** $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5.** $u_n = 1-\cos\dfrac{\pi}{n}$ **6.** $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

Exercice 2. *Développement asymptotique de la série harmonique*

On pose $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.
1. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de H_n afin de prouver que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1}-u_n$.
   Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$.
   La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 3. *Cauchy-Schwarz*

On note $E = \mathcal{C}([0,1])$ et F le sous-ensemble des fonctions de E qui ne s'annulent pas sur $[0,1]$ $(\forall x \in [0,1], f(x) \neq 0)$.
On munit E du produit scalaire :
$$(f,g) = \int_0^1 fg.$$
Pour $f \in F$, on note :
$$\phi(f) = \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}.$$
1. Rappeler pourquoi $(.|.)$ est un produit scalaire.
2. Rappeler l'inégalité de Cauchy Schwarz et sa démonstration. Préciser, sans preuve, le cas d'égalité.
3. Montrer que l'on a : $\forall f \in F, \phi(f) \geq 1$.
4. Préciser l'ensemble des fonctions g de F telles que $\phi(g)=1$.
5. ϕ est elle majorée sur F ? (Indication : considérer les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$)