Devoir sur table (Calculatrice autorisée)

1 Court problème sur l'identité du parallélogramme

On dit que $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

— $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
— $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
— $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Il est bien connu que si E est un espace préhilbertien muni de la norme $\|.\|$, alors l'identité de la médiane (ou du parallélogramme) est vérifiée, à savoir : pour tous x, y de E, on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer une sorte de réciproque à cette propriété, à savoir le résultat suivant : on suppose que E est un espace vectoriel réel dont la norme $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ vérifie l'identité de la médiane, et l'on va prouver que E est nécessairement un espace préhilbertien, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur E tel que pour tout x de E, on a $(x, x) = \|x\|^2$.
Il s'agit donc de construire un produit scalaire, et compte tenu des formules de polarisation, on pose :

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout x, y de E, on a $(x, y) = (y, x)$ et $(x, x) = \|x\|^2$.
2. Montrer que pour $x_1,\ x_2,\ y \in E$, on a $(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) = 0$ (on utilisera l'identité de la médiane avec les paires $(x_1 + y, x_2 + y)$ et $(x_1 - y, x_2 - y)$).
3. Montrer, en utilisant la question précédente,que :
   (a) si $x, y \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(nx, y) = n(x, y)$;
   (b) si $x, y \in E$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $(kx, y) = k(x, y)$;
   (c) si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $(rx, y) = r(x, y)$;
   (d) si $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.
   Indication pour cette dernière question : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on sait par densité de $\mathbb{Q}$ qu'il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels tels que $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Prouver alors que l'on a $(r_n x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\lambda x, y)$, puis le résultat voulu.
4. Conclure.

2 Problème : minimisation de la norme quadratique de polynômes unitaires

Dans l'ensemble du problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On note $\mathcal{P}_n$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ formé des fonctions-polynômes unitaires et de degré n, autrement dit des fonctions-polynômes de degré n et dont le coefficient de X^n est égal à 1.
L'objectif du problème est de déterminer des fonctions-polynômes P appartenant à $\mathcal{P}_n$ et réalisant le minimum sur $\mathcal{P}_n$ de l'expression suivante :

$$N_2(P) = \sqrt{\int_{-1}^{+1} P^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

On associe à tout couple (P, Q) de fonctions-polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ le nombre réel suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Dans le cas $n = 2$, déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$, de polynômes unitaires de degrés respectifs 0, 1 et 2 orthogonaux entre eux pour le produit scalaire défini ci-dessus.
En déduire une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Toujours dans le cas $n = 2$, on note $\pi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_1[X]$.

a) A l'aide de la question précédente, calculer $\pi(aX^2 + bX + c)$ en fonction des trois réels a, b et c.

b) Déterminer la valeur de :

$$m_2 = \sqrt{\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt}$$

4) On considère la fonction f associant à tout n-uplet $(x_0, x_1, \dots x_{n-1})$ de nombres réels l'expression suivante (qui représente le carré de la distance entre les deux fonctions-polynômes $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto x_{n-1}t^{n-1} + \dots + x_1 t + x_0$ de $\mathbb{R}_n[X]$) :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - x_{n-2}t^{n-2} - \dots - x_1 t - x_0)^2 \, \mathrm{d}t$$

a) Citer avec précision le théorème permettant d'affirmer l'existence et l'unicité d'un n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ réalisant le minimum (désormais noté m_n) de l'expression $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ lorsque $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ décrit $\mathbb{R}^n$, et montrer que ces n nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ vérifient les n relations suivantes :

$$\int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_1 t - a_0)t^k \, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{où} \quad 0 \le k < n$$

On explicitera ces n relations en calculant les n intégrales figurant ci-dessus pour $0 \le k < n$.

b) On pose pour tout nombre réel x distinct de $-1, -2, \dots - n, -n - 1$:

$$F(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{a_{n-1}}{x+n} - \frac{a_{n-2}}{x+n-1} - \dots - \frac{a_1}{x+2} - \frac{a_0}{x+1}$$

Etablir l'existence d'un réel a tel que l'on ait pour x distinct de $-1, -2, \dots - n, -n - 1$:

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)F(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Déterminer la valeur de a en faisant tendre x vers $-n - 1$ dans chacun des deux membres de l'égalité précédente (on exprimera a en fonction de $n!$ et $(2n)!$).

c) Etablir l'égalité suivante :

$$m_n = f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_1 t - a_0)t^n \, \mathrm{d}t$$

d) Etablir enfin que $m_n = F(n)$ et en déduire que $m_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

5) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

a) Pour toute fonction-polynôme P appartenant à $\mathcal{P}_n$, effectuer le changement de variables défini par $x = 2t - 1$ dans l'intégrale figurant dans l'expression de $N_2(P)$ et en déduire que :

$$N_2(P) \ge 2^n \sqrt{2m_n}.$$

b) En déduire le minimum de $N_2(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.