Corrigé du devoir sur table

1 Court problème sur l'identité du parallélogramme

On dit que $\|.\| : E \to I\!R$ est une norme sur le $I\!R$-espace vectoriel E si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :
— $\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
— $\forall (\lambda, x) \in I\!R \times E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
— $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Il est bien connu que si E est un espace préhilbertien muni de la norme $\|.\|$, alors l'identité de la médiane (ou du parallélogramme) est vérifiée, à savoir : pour tous x, y de E, on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer une sorte de réciproque à cette propriété, à savoir le résultat suivant : on suppose que E est un espace vectoriel réel dont la norme $\|.\| : E \to I\!R$ vérifie l'identité de la médiane, et l'on va prouver que E est nécessairement un espace préhilbertien, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur E tel que pour tout x de E, on a $(x, x) = \|x\|^2$.
Il s'agit donc de construire un produit scalaire, et compte tenu des formules de polarisation, on pose :

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Pour tous x, y de E, on a $(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2 - |-1|^2\|y-x\|^2\right) = (y, x)$ et $(x, x) = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2 - \|0\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(4\|x\|^2 - 0\|0\|^2\right) = \|x\|^2$.
2. Si $x_1,\ x_2,\ y \in E$, grâce à l'identité de la médiane avec les paires (x_1+y, x_2+y) et (x_1-y, x_2-y), on a :

$$\|x_1+x_2+2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 = 2\|x_1+y\|^2 + 2\|x_2+y\|^2.$$
$$\|x_1+x_2-2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 = 2\|x_1-y\|^2 + 2\|x_2-y\|^2.$$

On obtient alors par différence des deux lignes :

$$\|x_1+x_2+2y\|^2 - \|x_1+x_2-2y\|^2 = 2(\|x_1+y\|^2 - \|x_1-y\|^2) + 2(\|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2).$$
$$4(x_1+x_2, 2y) = 8(x_1, y) + 8(x_2, y)$$
$$(x_1+x_2, 2y) = 2(x_1, y) + 2(x_2, y) \quad (*)$$

On souhaite maintenant prouver que pour tout $(x, y) \in E^2, (x, 2y) = 2(x, y)$.
On a $(x, 2y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+2y\|^2 - \|x-2y\|^2\right)$. On écrit deux identités de la médiane :

$$\|(x+y)+y\|^2 + \|(x+y)-y\|^2 = 2\|x+y\|^2 + 2\|y\|^2,$$
$$\|(x-y)+y\|^2 + \|(x-y)-y\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Elles se traduisent par :

$$\|x+2y\|^2 + \|x\|^2 = 2\|x+y\|^2 + 2\|y\|^2,$$
$$\|x-2y\|^2 + \|x\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|y\|^2.$$

On les soustrait :

$$\|x+2y\|^2 - \|x-2y\|^2 = 2\|x+y\|^2 - 2\|x-y\|^2,$$

et ceci signifie bien que $(x, 2y) = 2(x, y)$.
Revenons à notre dernière égalité portant sur x_1, x_2 et y : on a donc $(x_1+x_2, 2y) = 2(x_1+x_2, y)$ d'où, en remplaçant dans $(*)$, $(x_1+x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

3. Montrer, en utilisant la question précédente,que :

   (a) si $x, y \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(nx, y) = n(x, y)$;

   Pour $n = 0$: si $x, y \in E$, $(0x + 0x, y) = (0x, y) + (0x, y)$ donc $(0x, y) = 2(0x, y)$ et $(0x, y) = 0$.

   Hérédité : Supposons que c'est vrai au rang n, on a alors $((n+1)x, y) = (nx+x, y) = (nx, y)+(x, y)$ et l'hypothèse de récurrence garantit $(nx, y) = n(x, y)$ donc on obtient $((n+1)x, y) = n(x, y)+(x, y) = (n + 1)(x, y)$.

   La propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) si $x, y \in E$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $(kx, y) = k(x, y)$:

   Il n'y a à le prouver que si k est négatif, c'est à dire pour $k = -n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

   On a alors $(-nx+nx, y) = (0x, y) = 0$ or $(-nx+nx, y) = (-nx, y)+(nx, y)$ donc $(-nx, y)+(nx, y) = 0$, i.e. $(-nx, y) = -(nx, y) = -n(x, y)$ et la propriété est prouvée ;

   (c) si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$, $(rx, y) = r(x, y)$:

   $r = \frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a $q(\frac{p}{q}x, y) = (q\frac{p}{q}x, y) = (px, y) = p(x, y)$ donc $q(\frac{p}{q}x, y) = p(x, y)$, d'où l'on déduit $(\frac{p}{q}x, y) = \frac{p}{q}(x, y)$, c'est à dire $(rx, y) = r(x, y)$;

   (d) si $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$:

   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on sait qu'il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels telle que $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ (par exemple la suite des approximations décimales à 10^{-n} près par défaut). Calculons alors :

$$(r_n x, y) - (\lambda x, y) = \frac{1}{4}\left(\|r_n x + y\|^2 - \|r_n x - y\|^2 - \|\lambda x + y\|^2 + \|\lambda x - y\|^2\right)$$

   On montre alors que si $(x, y) \in E$, $\|x + ty\| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \|x\|$ où t désigne un réel qui tend vers 0.

   En effet, on a par l'inégalité triangulaire $\|x + ty\| \leq \|x\| + \|ty\| = \|x\| + |t|\|y\|$ donc $\|x + ty\| - \|x\| \leq |t|\|y\|$ et $\|x\| = \|x + ty - ty\| \leq \|x + ty\| + \|-ty\| = \|x + ty\| + |t|\|y\|$ d'où $-|t|\|y\| \leq \|x + ty\| - \|x\|$.

   On obtient finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ -|t|\|y\| \leq \|x + ty\| - \|x\| \leq |t|\|y\|$$

   d'où l'on déduit que $\|x + ty\| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \|x\|$.

   Or on a :

$$(r_n x, y) - (\lambda x, y) = \frac{1}{4}\left(\|(r_n - \lambda)x + \lambda x + y\|^2 - \|(r_n - \lambda)x + \lambda x - y\|^2 - \|\lambda x + y\|^2 + \|\lambda x - y\|^2\right)$$

   Puisque $r_n - \lambda \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $(r_n x, y) - (\lambda x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire que $(r_n x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\lambda x, y)$.

   Or $(r_n x, y) = r_n(x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda(x, y)$, d'où l'on déduit par unicité de la limite $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

4. On a donc défini, à partir d'une norme vérifiant l'identité de la médiane, une forme symétrique, linéaire par rapport à la première variable puisque si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et que $(x_1, x_2, y) \in E^3$, on a :

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = (\lambda_1 x_1, y) + (\lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y).$$

   Par symétrie, on a donc une forme bilinéaire qui est définie positive d'après la question 1 et les propriétés vérifiées par une norme. On a bien construit un produit scalaire dont la norme associée est $\|.\|$. Ainsi, une norme provient d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité de la médiane.

2 Problème : minimisation de la norme quadratique de polynômes unitaires

Dans l'ensemble du problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On note $\mathcal{P}_n$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ formé des fonctions-polynômes unitaires et de degré n, autrement dit des fonctions-polynômes de degré n et dont le coefficient de X^n est égal à 1.

L'objectif du problème est de déterminer des fonctions-polynômes P appartenant à $\mathcal{P}_n$ et réalisant le minimum sur $\mathcal{P}_n$ de l'expression suivante :

$$N_2(P) = \sqrt{\int_{-1}^{+1} P^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

On associe à tout couple (P, Q) de fonctions-polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ le nombre réel suivant :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$:
- cette application est bilinéaire par linéarité de l'intégrale,
- cette application est symétrique car le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$,
- cette application est positive et définie : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\langle P, P\rangle = \int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ puisque la fonction $t \mapsto P^2(t)$ est à valeurs positives sur $[0, 1]$; en outre on a $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si la fonction polynomiale associée à P, qui est continue, est nulle sur $[0, 1]$, c'est à dire si P est le polynôme nul.

2) Dans le cas $n = 2$, déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$, de polynômes unitaires de degrés respectifs 0, 1 et 2 orthogonaux entre eux pour le produit scalaire défini ci-dessus.
Selon le procédé de Gram-Schmidt, on pose $P_0 = 1$, puis $P_1 = X + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que $\langle P_0, P_1\rangle = 0$, i.e. $\int_0^1 t + \lambda\,\mathrm{d}t = 0$, c'est à dire $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $P_1 = (X - \frac{1}{2})$.
Enfin, on pose $P_2 = X^2 + aP_1 + bP_0$ où a et b sont choisis de sorte que $\langle P_2, P_1\rangle = \langle P_2, P_0\rangle = 0$. Ceci nous donne :

$$\begin{cases} \langle X^2, P_1\rangle + a\langle P_1, P_1\rangle &= 0 \\ \langle X^2, P_0\rangle + b\langle P_0, P_0\rangle &= 0 \end{cases}$$

On calcule $\langle X^2, P_1\rangle = \frac{1}{12}$, $\langle X^2, P_0\rangle = \frac{1}{3}$, $\langle P_0, P_0\rangle = 1$ et $\langle P_1, P_1\rangle = \frac{1}{12}$. On en déduit $a = -1$ et $b = -\frac{1}{3}$.
Ainsi, $P_2 = X^2 - P_1 - \frac{1}{3}P_0 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.
Il ne reste plus qu'à calculer $\langle P_2, P_2\rangle = \langle P_2, X^2 - P_1 - \frac{1}{3}P_0\rangle = \langle P_2, X^2\rangle$ par orthogonalité de P_2 avec P_1 et P_0. Ceci simplifie le calcul de $\langle P_2, P_2\rangle = \int_0^1 t^4 - t^3 + \frac{1}{6}t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{180}$.
On a alors une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ en posant $Q_0 = 1$, $Q_1 = \sqrt{12}P_1$ et $Q_2 = 6\sqrt{5}P_2$.

3) Toujours dans le cas $n = 2$, on note $\pi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_1[X]$.

a) A l'aide de la question précédente, calculer $\pi(aX^2 + bX + c)$ en fonction des trois réels a, b et c.
Méthode rapide : $X^2 = X^2 - X + \frac{1}{6} + X - \frac{1}{6}$, or $X^2 - X + \frac{1}{6} \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$ et $X - \frac{1}{6} \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\pi(X^2) = X - \frac{1}{6}$ et l'on en déduit :

$$\pi(aX^2 + bX + c) = a\pi(X^2) + \pi(bX + c)$$

$$\pi(aX^2 + bX + c) = a(X - \frac{1}{6}) + bX + c$$

$$\pi(aX^2 + bX + c) = (a + b)X - \frac{1}{6}a + c$$

Méthode suivant le cours sans réflechir : D'après le cours, puisque (Q_0, Q_1) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, on peut calculer ainsi la projection :

$$\pi(aX^2 + bX + c) = \langle aX^2 + bX + c, Q_0\rangle Q_0 + \langle aX^2 + bX + c, Q_1\rangle Q_1$$

$$\pi(aX^2 + bX + c) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c + 12\langle aX^2 + bX + c, P_1\rangle P_1$$

$$\pi(aX^2 + bX + c) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c + 12\left(\frac{1}{12}a + \frac{1}{12}b\right)\left(X - \frac{1}{2}\right)$$

$$\pi(aX^2 + bX + c) = (a + b)X - \frac{1}{6}a + c$$

b) Déterminer la valeur de :

$$m_2 = \sqrt{\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt}$$

On remarque que $m_2 = \inf_{Q\in\mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - Q\|$. Dans un espace euclidien, la plus courte distance entre un élément de E (ici X^2) et un s.e.v. F (ici $\mathbb{R}_1[X]$) est obtenue à l'aide du prjeté orthogonal sur F donc $m_2 = \|X^2 - \pi(X^2)\|$.

Ainsi, $m_2 = \|X^2 - X + \frac{1}{6}\| = \|P_2\| = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}$.

4) On considère la fonction f associant à tout n-uplet $(x_0, x_1, \dots x_{n-1})$ de nombres réels l'expression suivante (qui représente le carré de la distance entre les deux fonctions-polynômes $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto x_{n-1}t^{n-1} + \cdots + x_1 t + x_0$ de $\mathbb{R}_n[X]$) :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - x_{n-2}t^{n-2} - \cdots - x_1 t - x_0)^2 \,\mathrm{d}t$$

a) Citer avec précision le théorème permettant d'affirmer l'existence et l'unicité d'un n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ réalisant le minimum (désormais noté m_n) de l'expression $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ lorsque $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ décrit $\mathbb{R}^n$.

Si $(E, <,>)$ est un espace préhilbertien, que $\|.\|$ est la norme associée à son produit scalaire, que F est un s.e.v. de dimension finie de E et que $v \in E$, alors on a :

$$\forall f \in F,\ \|v - f\| \geq \|v - p_F^{\perp}(v)\|$$

où $p_F^{\perp}$ désigne le projecteur orthogonal sur F.

En outre, on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $f = p_F^{\perp}(v)$.

On applique ici ce théorème dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire de ce problème avec $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $v = X^n$. Ainsi, on a un unique $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est à dire un unique n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ tel que

$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ minimise $\|X^n - f\|$, et donc aussi $\|X^n - f\|^2$ pour $f \in F$.

Ce n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est tel que $a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} = \pi_F^{\perp}(X^n)$, et donc

$$X^n = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} \ + \ (X^n - a_0 - a_1 X - \cdots - a_{n-1}X^{n-1})$$

est la décomposition de X^n selon la somme directe $F \oplus F^{\perp}$.

En particulier, $(X^n - a_0 - a_1 X - \cdots - a_{n-1}X^{n-1}) \in F^{\perp}$ donc on a :

$$\int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \cdots - a_1 t - a_0) t^k \,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{où} \quad 0 \leq k < n$$

$$\frac{1}{n+k+1} - \frac{a_{n-1}}{n+k} - \frac{a_{n-2}}{n+k-1} - \cdots - \frac{a_1}{2+k} - \frac{a_0}{1+k} = 0 \quad \text{où} \quad 0 \leq k < n$$

b) On pose pour tout nombre réel x distinct de $-1, -2, \cdots - n, -n-1$:

$$F(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{a_{n-1}}{x+n} - \frac{a_{n-2}}{x+n-1} - \cdots - \frac{a_1}{x+2} - \frac{a_0}{x+1}$$

Notons $G(x) = (x+n+1)(x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)F(x)$, l'expression de F nous garantit que G est une fonction polynôme sur $\mathbb{R} \setminus \{-n-1, -n, -n+1, \cdots, -1\}$ (chaque dénominateur se simplifie avec un des termes du produit).

De plus, le degré de G inférieur ou égal à n, et l'on observe que les nombres de 0 à $n-1$ sont des racines de G (d'après la question précédente), donc G est scindé à racines simples et s'écrit :

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)F(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

où a est le coefficient dominant de G.

Pour déterminer la valeur de a, on fait tendre x vers $-n-1$ dans chacun des deux membres de l'égalité précédente :

— le membre de gauche est équivalent à $(x+n+1)(-1)(-2)\cdots(-n)F(x) = (-1)^n n!(x+n+1)F(x)$, et $F(x) \underset{x\to -n-1}{\sim} \frac{1}{x+n+1}$ d'où finalement une limite $(-1)^n n!$ pour le membre de gauche ;

— le membre de droite tend en $-n-1$ vers $a(-n-1)(-n-2)\cdots(-2n) = a(-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Par unicité de la limite, on a égalité entre les deux nombres précédemment trouvés, donc $a = \dfrac{n!^2}{(2n)!}$.

c) On sait que :

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \cdots - a_1 t - a_0)^2 \,\mathrm{d}t$$

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \cdots - a_1 t - a_0)(t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \cdots - a_1 t - a_0) \,\mathrm{d}t$$

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \cdots - a_1 t - a_0)t^n$$

$$- \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \cdots - a_1 t - a_0)(a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_1 t + a_0) \,\mathrm{d}t$$

Or on a vu précédemment que $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \cdots - a_1 X - a_0$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc la deuxième intégrale est nulle et l'on a :

$$m_n = f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \cdots - a_1 t - a_0)t^n \,\mathrm{d}t$$

d) D'après la question précédente, on a :

$$m_n = \int_0^1 t^{2n} - a_{n-1}t^{2n-1} - a_{2n-2}t^{2n-2} - \cdots - a_1 t^{n+1} - a_0 t^n \,\mathrm{d}t$$

$$m_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{a_{n-1}}{2n} - \frac{a_{2n-2}}{2n-1} - \cdots - \frac{a_1}{n+2} - \frac{a_0}{n+1}$$

On a donc $m_n = F(n)$, et d'après la question b), on a :

$$(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)F(n) = \frac{n!^2}{(2n)!}n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

$$\frac{(2n+1)!}{n!}F(n) = \frac{n!^3}{(2n)!}$$

et on en déduit que $m_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

5) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

a) Si P appartient à $\mathcal{P}_n$, on a $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $P(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \alpha_0$, et si on effectue le changement de variables défini par $x = 2t-1$ dans l'intégrale figurant dans l'expression de $N_2(P)$, on obtient :

$$N_2(P) = \sqrt{\int_0^1 P^2(2t-1)2 \,\mathrm{d}t}$$

Or $P(2t-1) = (2t-1)^n + \alpha_{n-1}(2t-1)^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ est un polynôme en t de degré n et de coefficient dominant 2^n donc $\frac{P(2t-1)}{2^n}$ est unitaire, et :

$$N_2(P) = 2^n\sqrt{2}\sqrt{\int_0^1 \left(\frac{P(2t-1)}{2^n}\right)^2 \mathrm{d}t}$$

On a donc $N_2(P) \geq 2^n\sqrt{2m_n}$ puisque l'intégrale du carré du polynôme unitaire de degré n est plus grande que m_n.

b) Notons $Q(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0$ le polynôme tel que $m_n = \int_0^1 Q^2(t)\,\mathrm{d}t$. Soit alors $R(x) = 2^n Q\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$, c'est un polynôme unitaire de degré n, calculons :

$$N_2(R) = \sqrt{\int_{-1}^{1} 2^{2n} Q^2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x}$$

On fait le changement de variable $x = 2t - 1$ à nouveau :

$$N_2(R) = \sqrt{\int_0^1 2^{2n} Q^2\left(t\right) 2\,\mathrm{d}t}$$

$$N_2(R) = 2^n\sqrt{2m_n}$$

On a vu à la question précédente que $\forall P \in \mathcal{P}_n$, $N_2(P) \geq 2^n\sqrt{2m_n}$, ce minorant est le minimum de $N_2(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$ puisqu'il est atteint pour $P = R$.