Corrigé du devoir surveillé

1 Variables aléatoires

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

1.1 Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. X suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, c'est à dire que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et que pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$. On en déduit que $E(X) = \dfrac{n}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n}{4}$.
2. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P(Y = k) = \dfrac{1}{2^k}$ car cet événement signifie que les $k-1$ premiers tirages sont des boules noires, et que la k-ième est une blanche, or ces k évènements indépendants (car $c = 0$) ont tous une probabilité $\dfrac{1}{2}$. $P(Y = 0) = \dfrac{1}{2^n}$ puisque cet évènement signifie que les n tirages ont tous donné une boule blanche.
3. Calculons :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

Prouvons le par récurrence. Pour $n = 1$, calculons le membre de droite :

$$\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} = \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{(1-x)^2}$$

$$\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} = x$$

Donc la propriété annoncée est vraie pour $n = 1$.
Supposons qu'elle est vraie au rang n, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1}(1-2x+x^2)}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \frac{(n+1)x^{n+3} - (n+2)x^{n+2} + x}{(1-x)^2}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Calculons maintenant $E(Y)$:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} P(Y = k)k$$

$$E(Y) = \frac{1}{2^n}0 + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$E(Y) = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$E(Y) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

$$E(Y) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

1.2 Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. La variable Z_p représente le nombre de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages.
2. X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, son espérance vaut donc $E(X_1) = \frac{1}{2}$.
3. A l'aide d'un arbre, on détermine aisément la loi du couple (X_1, X_2) :

X_1 \ X_2	0	1
0	$\frac{c+1}{2(c+2)}$	$\frac{1}{2(c+2)}$
1	$\frac{1}{2(c+2)}$	$\frac{c+1}{2(c+2)}$
Marginale	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On en déduit donc que X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc que son espérance est $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

4. Déterminons maintenant la loi de probabilité de Z_2 :

z	0	1	2
$P(Z_2 = z)$	$\frac{c+1}{2(c+2)}$	$\frac{1}{c+2}$	$\frac{c+1}{2(c+2)}$

5. $Z_p(\Omega) = [\![0, p]\!]$ puisque après p tirages, on a tiré entre 0 et p fois une boule blanche.
6. Soit $p \leqslant n-1$.

(a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
Si $Z_p = k$, on a donc $kc+1$ boules blanches dans l'urne, $(p-k)c+1$ noires et un total de $pc+2$ boules puisqu'on en a rajouté c à chaque tirage. Ainsi, les boules étant indiscernables, on a :

$$P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \frac{1+kc}{2+pc}$$

(b) En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$$

$$P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$$

$$P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) \frac{1+kc}{2+pc}$$

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1}{2+pc} \sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) + kcP(Z_p = k)$$

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1}{2+pc} \left(\sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) + c \sum_{k=0}^{p} kP(Z_p = k) \right)$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{p} P(Z_p = k) = 1$ et $E(Z_p) = \sum\limits_{k=0}^{p} kP(Z_p = k)$ d'où :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$

(c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Suivant l'indication, on raisonne par récurrence.
Pour $n = 1$, on a déjà vu que X_1 est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Supposons donc que c'est vrai pour $X_1, X_2, \cdots, X_p$. On a alors :

$$E(Z_p) = \sum_{k=1}^{p} E(X_k) = \frac{p}{2}$$

On en déduit avec la question précédente :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1+c\frac{p}{2}}{2+pc} = \frac{1}{2}.$$

Et X_{p+1} est donc une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

La propriété est héréditaire, tous les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

2 Exercices

Exercice 1. *Quelques convergences*

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = n\sin(1/n)$	**2**. $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$	**3**. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$
4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$	**5**. $u_n = 1-\cos\dfrac{\pi}{n}$	**6**. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

1. On a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = 1$, et la série est grossièrement divergente.
2. Comme $u_n = \left(\frac{n}{2}\right)^n$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, et la série est grossièrement divergente.
3. On a :
$$n^2 u_n = \exp\left(2\ln n - \sqrt{n}\ln 2\right) = \exp\left(-\sqrt{n}\left(\ln 2 - 2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\right).$$
Il résulte de $\lim_\infty \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ que
$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = 0,$$
et par comparaison à une série de Riemann, $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série est convergente.
4. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, on obtient
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n},$$
et la série à termes positifs est donc divergente.
5. En utilisant le développement limité du cosinus, ou l'équivalent $1-\cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}$, on voit que :
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{2n^2},$$
et la série est convergente.
6. On a $(-1)^n + n \sim_{+\infty} n$ et $n^2+1 \sim_{+\infty} n^2$, et donc
$$\frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$
Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 2. *Développement asymptotique de la série harmonique*

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de H_n afin de prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.

   Pour $k \geq 1$, on a $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$,

   et pour $k \geq 2$, on a $\forall t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$ donc $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

   Ainsi, on a pour $n \geq 2$:
$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$
$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t}$$
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$
$$\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1$$
$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
   On a donc $\frac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où $H_n \sim \ln n$.

2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   On calcule :
$$v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n})$$
$$v_n = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n})$$
$$v_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$
$$v_n \underset{n\to\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$
   On en déduit que $|v_n| \sim \frac{1}{2n^2}$ donc la série est absolument convergente par comparaison avec une série de Riemann, en particulier cette série converge.
   Notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles, on a si $n \geq 1$:
$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{n+1} - u_n) = u_n - u_1.$$
   Puisque $S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ et que $u_n = u_1 + S_{n-1}$, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

Exercice 3. *Cauchy-Schwarz*

On note $E = \mathcal{C}([0,1])$ et F le sous-ensemble des fonctions de E qui ne s'annulent pas sur $[0,1]$ ($\forall x \in [0,1], f(x) \neq 0$).
On munit E du produit scalaire :
$$(f,g) = \int_0^1 fg.$$
Pour $f \in F$, on note :
$$\phi(f) = \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}.$$

1. Rappeler pourquoi $(.|.)$ est un produit scalaire.
   — $(.|.)$ est symétrique car si f et g sont dans E, on a :
$$(f|g) = \int_0^1 fg$$
$$(f|g) = \int_0^1 gf$$
$$(f|g) = (g|f)$$
   — $(.|.)$ est linéaire par rapport à la deuxième variable : si f est dans E, que $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(g,h) \in E^2$, on a :
$$(f|\lambda g + \mu h) = \int_0^1 f(\lambda g + \mu h)$$
$$(f|\lambda g + \mu h) = \int_0^1 (\lambda fg + \mu fh)$$
$$(f|\lambda g + \mu h) = \lambda \int_0^1 fg + \mu \int_0^1 fh$$
$$(f|\lambda g + \mu h) = \lambda(f|g) + \mu(f|h).$$
   Par symétrie, $(.|.)$ est donc bilinéaire.
   — $(.|.)$ est défini et positif puisque si $f \in E$, f^2 est continue et à valeur positives donc $(f|f) = \int_0^1 f^2 \geq 0$ et l'intégrale n'est nulle que si f^2 est nulle sur $[0,1]$, c'est à dire si $f = 0$.

2. Rappeler l'inégalité de Cauchy Schwarz et sa démonstration. Préciser, sans preuve, le cas d'égalité.
   Si x et y sont deux vecteurs de l'espace préhilbertien E muni du produit scalaire $(.|.)$, alors on a :

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)(y|y)}.$$

   L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires. Prouvons l'inégalité.
   Soient donc x et y dans E. Si y est le vecteur nul, alors l'inégalité est vraie. Sinon, on définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (x + ty|x + ty).$$

   f est une fonction à valeurs positives ou nulles puisque le produit scalaire est positif, et l'on a par bilinéarité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (y, y)t^2 + 2(x|y)t + (x|x).$$

   Ainsi, f est une fonction trinôme du second degré de signe constant, on en déduit que sont discriminant Δ est négatif ou nul, c'est à dire :

$$4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leq 0$$
$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y).$$

   Ces deux dernières quantités étant positives, leurs racines carrées vérifient la même inégalité.

3. Montrer que l'on a : $\forall f \in F, \phi(f) \geq 1$.
   Soit $f \in F$, on suppose dans un premier temps que f est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$. On a alors aussi $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ qui sont continues donc on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|(\sqrt{f}|\frac{1}{\sqrt{f}})\right| \leq \sqrt{(\sqrt{f}|\sqrt{f})(\frac{1}{\sqrt{f}}|\frac{1}{\sqrt{f}})}$$
$$1 \leq \sqrt{\int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}}$$
$$1 \leq \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}$$

   Si $f \in F$ n'est pas à valeurs positives, ceci signifie qu'elle est à valeurs toutes strictement négatives puisque f est continue et ne s'annule pas. On applique alors l'inégalité à $-f$ et l'on obtient le résultat souhaité.

4. Préciser l'ensemble des fonctions g de F telles que $\phi(g) = 1$.
   Si $g \in F$ est à valeurs positives, on a égalité si et seulement si $\sqrt{g}$ et $\frac{1}{\sqrt{g}}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si g est une fonction constante. Encore une fois, si g est plutôt à valeurs négatives, on fait le même raisonnement avec $-g$ et les fonctions g de F telles que $\phi(g) = 1$ sont donc les fonctions constantes (et non nulles).

5. ϕ est elle majorée sur F ? (Indication : considérer les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$) Suivant l'indication, on note $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ et l'on calcule :

$$\phi(f_\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda x} \text{ dx} \int_0^1 e^{-\lambda x} \text{ dx}$$
$$\phi(f_\lambda) = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} \frac{e^{-\lambda} - 1}{-\lambda}$$
$$\phi(f_\lambda) = \frac{e^\lambda(1 - e^{-\lambda})^2}{\lambda^2}$$

   Or $\frac{e^\lambda}{\lambda^2} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'où $\phi(f_\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et ϕ n'est pas majorée sur F.