Devoir à la maison

1. On s'intéresse dans cette première partie aux fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$(R)\ \forall x, y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$
   (a) On suppose dans cette première partie que f est une solution du problème, et l'on note $a = f(1)$.
      i. Déterminer la valeur $f(0)$.
      ii. Si n est un entier naturel et $r \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(nr) = nf(r)$.
      iii. Si k est un entier relatif et $r \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(kr) = kf(r)$.
      iv. Si r est un nombre rationnel, ce qui signifie que l'on a $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$, montrer que l'on a $f(r) = ar$.
   (b) Conclure en décrivant toutes les fonctions qui sont solution de l'équation fonctionnelle.
2. Dans cette deuxième partie de l'exercice, on s'intéresse aux fonctions $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$(S)\ \forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ g(x+y) = g(x)g(y).$$
   (a) Quelles sont les fonctions constantes qui sont solution du problème ?
   (b) On considère dans cette question une fonction $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, qui n'est pas la fonction nulle, et qui vérifie (S).
      i. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) \neq 0$.
      ii. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) > 0$.
      iii. Montrer que la fonction f définie pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par $f(r) = \ln(g(r))$ vérifie (R).
      iv. Prouver qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = e^{ar}.$$
   (c) Conclure.