Devoir à la maison

Exercice 1. *Exercices basiques*

1. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E :
$$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}.$$
Montrer que $A\Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$ ($C_E A$ désigne le complémentaire de A dans E).
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) f est la fonction nulle.
   (b) f s'annule.
   (c) f est à valeurs positives.
   (d) f est constante.
   (e) f est strictement croissante sur I.

Exercice 2. *Irrationalité*

On considère le nombre $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Le but de l'exercice est de prouver qu'il est irrationnel. Par l'absurde, on suppose désormais que $y \in \mathbb{Q}$.

1. Prouver alors que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$.
2. En reprenant des arguments comparables à ceux de la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, prouver l'irrationalité de $\sqrt{6}$ et conclure.

Exercice 3. *Récurrences*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n$.
Démontrer par récurrence que $u_n \leq \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geq 3$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(1+\sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des nombres entiers naturels.

Exercice 4. *Équations fonctionnelles*

Les deux parties de cet exercice sont liées, on pourra admettre les résultats de la première partie pour traiter la deuxième.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :
$$(R)\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$
On pose $a = f(1)$.

(a) Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que f est impaire.

(b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.

(c) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$. En particulier, $f(r) = ar$.

(d) Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = at$. Conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (R).

2. Soit $g : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ une application continue telle que :

$$(S) \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x + y) = \frac{g(x) + g(y)}{1 + g(x)g(y)}.$$

(a) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1, 1[$, et que ϕ vérifie (S).

(b) En déduire une expression simple, si $(X, Y) \in]-1, 1[^2$, de $\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right)$ en fonction de $\phi^{-1}(X)$ et $\phi^{-1}(Y)$.

(c) On note $h = \phi^{-1} \circ g$, montrer que h vérifie la propriété (R) de la première partie de l'exercice.

(d) Déterminer alors une expression simple de g, et conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (S).

Exercice 5. *Injections, surjections, bijections*

1. On note $Id_E : E \to E$ l'application telle que $\forall x \in E$, $Id_E(x) = x$. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = Id_E$. Montrer que f est bijective.
2. A quelle condition sur les sous-ensembles A et B d'un ensemble E donné l'application : $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie pour toute partie X de E par $\phi(X) = (A \cap X, B \cap X)$ est-elle injective ? surjective ?