Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. *Exercices basiques*

1. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que f s'écrive ainsi $f = p + i$ où $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire. Alors on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p(x) + i(x)\ (1).$$
   Si $x \in \mathbb{R}$, la relation précédente doit être vérifiée pour $-x$ donc on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = p(-x) + i(-x),$$
   d'où par parité de p et imparité de i :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = p(x) - i(x)\ (2).$$
   En additionant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient $f(x)+f(-x) = 2p(x)$, en les soustrayant $f(x)-f(-x) = 2i(x)$. Ainsi, si f s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on a nécessairement :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
   Réciproquement, si l'on définit ainsi les fonctions p et i, on vérifie aisément que $f = p+i$, que p est paire et que i est impaire :
   — pour $f = p + i$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) + i(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$;
   — pour p paire, soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $p(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = p(x)$;
   — pour i impaire, soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $i(-x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = -i(-x)$.
2. Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E :
   $$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}.$$
   Montrer que $A\Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$ ($C_E A$ désigne le complémentaire de A dans E).
   Soit $x \in A\Delta B$. Par symétrie du problème, on peut toujours supposer que $x \in A$. Nécessairement, $x \notin B$. On en déduit que $x \in A$ et $x \in C_E B$. Ceci donne $x \in A \cap C_E B$. Réciproquement, si par exemple $x \in A \cap C_E B$, $x \in A$ et $x \notin B$, et donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. L'autre possibilité se traite exactement de la même façon.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) f est la fonction nulle : $\forall x \in I,\ f(x) = 0$.
   (b) f s'annule : $\exists x \in I,\ f(x) = 0$.

(c) f est à valeurs positives : $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$.

(d) f est constante : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) = c$.

(e) f est strictement croissante sur I : $\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Exercice 2. *Irrationalité*

On considère le nombre $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Le but de l'exercice est de prouver qu'il est irrationnel. Par l'absurde, on suppose désormais que $y \in \mathbb{Q}$.

1. Prouver alors que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$.

   Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel, c'est à dire qu'il existe a et b entiers tels que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$. En élevant cette égalité au carré, on obtient $2 + 3 + 2\sqrt{6} = \frac{a^2}{b^2}$ donc $\sqrt{6} = \frac{a^2 - 5b^2}{2b^2}$. Cette dernière écriture signifie que $\sqrt{6}$ est rationnel.

2. En reprenant des arguments comparables à ceux de la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, prouver l'irrationalité de $\sqrt{6}$ et conclure.

   Supposons par l'absurde que $\sqrt{6}$ est rationnel, on a alors deux entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$. On suppose en outre que p et q n'ont pas de diviseur commun, c'est à dire que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. En élevant au carré les deux membres de l'égalité, on obtient $p^2 = 6q^2$.

   Avant d'aller plus loin, rappelons le résultat suivant que nous avons démontré en cours par contraposée : si $p \in \mathbb{N}$ vérifie que p^2 est pair, alors p est pair. Par contraposition, il s'agissait de montrer que si p est impair, alors son carré est impair. Ceci se fait en écrivant qu'un entier p impair peut se mettre sous la forme $p = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$, et que son carré est alors de la forme $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et est donc impair.

   Revenant à notre raisonnement par l'absurde, on observe que $p^2 = 2(3q^2)$ est pair, donc que p est pair et peut s'écrire $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. On obtient alors $4p'^2 = 6q^2$ donc $2p'^2 = 3q^2$, c'est à dire $2(p'^2 - q^2) = q^2$. On déduit de cette dernière égalité que q^2 est pair donc que q est pair. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que p et q sont sans diviseur commun, et termine la preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{6}$.

   Puisque $\sqrt{6}$ est irrationnel, on a donc une contradiction avec notre raisonnement de la question 1. Ainsi, l'hypothèse émise à la question 1 est fausse et l'on a : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 3. *Récurrences*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$.

   Démontrer par récurrence que $u_n \leq \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 3$.

   On commence par calculer $u_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) u_1 = \frac{1}{2}$, et $u_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) u_2 = \frac{3}{8}$. Ainsi, on a bien $u_3 \leq \frac{2}{3}$.

   Vérifions que la propriété est héréditaire. Soit donc $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, tel que $u_n \leq \frac{2}{n}$, on a alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{2}{n} = \frac{n+1}{n^2}.$$

Vérifions alors que l'on a l'inégalité :

$$(I)\ \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2}{n+1}$$

$$(I) \Leftrightarrow\ \frac{(n+1)^2-2n^2}{n^2(n+1)} \leq 0$$

$$(I) \Leftrightarrow\ -n^2+2n+1 \leq 0$$

Le trinôme du second degré ci-dessus admet pour racines $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$ donc l'inéquation est vérifiée pour tout $n \notin]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$ et donc en particulier si $n \geq 3$. Cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit : $u_{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$, la propriété à démontrer est donc héréditaire et vraie pour tout entier $n \geq 3$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(1+\sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des nombres entiers naturels.
Pour $n = 0$, on a $(1+\sqrt{2})^0 = 1 + 0\sqrt{2}$ qui est de la forme voulue avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des nombres entiers naturels. On en déduit :

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$$

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$

Donc $(1+\sqrt{2})^{n+1}$ est de la forme attendue avec $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.
La propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. *Équations fonctionnelles*

1. On s'intéresse dans cette première partie aux fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$(R)\, \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(a) On suppose dans cette question que $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vérifie (R), et l'on note $a = f(1)$.

i. Prouver que $f(0) = 0$.
Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

ii. Montrer que f est une fonction impaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on obtient pour $y = -x$: $f(x-x) = f(x) + f(-x)$ donc $0 = f(x) + f(-x)$ i.e. $f(-x) = -f(x)$.

iii. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Si $n \in \mathbb{N}$ montrer que $f(nr) = nf(r)$.
On le démontre par récurrence : pour $n = 0$, c'est vrai puisque $f(0) = 0$.
On suppose donc que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, et on en déduit :

$$f((n+1)r) = f(nr + r)$$

$$f((n+1)r) = f(nr) + f(r)$$

$$f((n+1)r) = nf(r) + f(r)$$

$$f((n+1)r) = (n+1)f(r).$$

iv. Si k est un entier relatif, montrer que $f(k) = ak$.
D'après la question précédente, on a si $k \in \mathbb{N}$: $f(k) = kf(1) = ak$.
Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on peut appliquer le résultat à $(-k) \in \mathbb{N}$: $f(-k) = -ka$. Par imparité de f, on a donc bien dans ce cas aussi $f(k) = ak$.

v. Si r est un nombre rationnel, montrer que l'on a encore $f(r) = ar$.
Soit $r = \frac{p}{q}$ où $p \in Z$ et $q \in \mathbb{N}^*$ un nombre rationnel, on a donc :

$$f(qr) = qf(r)$$

$$f(p) = qf(r)$$

$$ap = qf(r)$$

$$f(r) = a\frac{p}{q} = ar.$$

(b) Montrer que les fonctions f qui vérifient (R) sont celles telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar.$$

On vient de voir que si f est une solution du problème, f est nécessairement une fonction linéaire, c'est à dire de la forme $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ où a est un réel.
Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle fonction vérifie, si x et y sont des réels :

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

Les fonctions solutions sont donc toutes celles de cette forme.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ une application continue telle que :

$$(S)\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = \frac{g(x) + g(y)}{1 + g(x)g(y)}.$$

(a) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
Montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1, 1[$, et que ϕ vérifie (S).
ϕ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\phi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$\phi'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

Ainsi, ϕ est strictement croissante, ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont -1 et 1, donc ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1, 1[$.
Calculons alors :

$$\frac{\phi(x) + \phi(y)}{1 + \phi(x)\phi(y)} = \frac{\dfrac{e^x-1}{e^x+1} + \dfrac{e^y-1}{e^y+1}}{1 + \dfrac{e^x-1}{e^x+1}\dfrac{e^y-1}{e^y+1}}.$$

$$\frac{\phi(x) + \phi(y)}{1 + \phi(x)\phi(y)} = \frac{(e^x-1)(e^y+1) + (e^y-1)(e^x+1)}{(e^x+1)(e^y+1) + (e^x-1)(e^y-1)}.$$

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{2e^x e^y - 2}{e^{x+y}+e^x+e^y+1+e^{x+y}-e^x-e^y+1}.$$

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{2e^{x+y}-2}{2e^{x+y}+2}.$$

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \phi(x+y).$$

(b) En déduire une expression simple, si $(X,Y)\in]-1,1[^2$, de $\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right)$ en fonction de $\phi^{-1}(X)$ et $\phi^{-1}(Y)$.

Pour $x=\phi^{-1}(X)$ et $y=\phi^{-1}(Y)$, on a d'après la question précédente :

$$\phi(\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)) = \frac{\phi(\phi^{-1}(X))+\phi(\phi^{-1}(Y))}{1+\phi(\phi^{-1}(X))\phi(\phi^{-1}(Y))}$$

$$\phi(\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)) = \frac{X+Y}{1+XY}$$

On en déduit que $\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)$ est l'unique antécédent dans $\mathbb{R}$ de $\frac{X+Y}{1+XY}$, donc :

$$\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right) = \phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y).$$

(c) On note $h=\phi^{-1}\circ g$, montrer que h vérifie la propriété (R) de la première partie de l'exercice.

Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, calculons :

$$h(x+y) = \phi^{-1}(g(x+y))$$

$$h(x+y) = \phi^{-1}(\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)})$$

On peut appliquer la question précédente avec $X=g(x)$ et $Y=g(y)$ donc :

$$h(x+y) = \phi^{-1}(g(x)) + \phi^{-1}(g(y))$$

$$h(x+y) = h(x)+h(y)$$

(d) Déterminer alors une expression simple de g, et conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant (S).

Comme h est continue puisque g et ϕ^{-1} le sont, on a donc d'après la première partie un nombre $a\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=ax$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}, \phi^{-1}(g(x))=ax$ donc $g(x)=\phi(ax)$.

Réciproquement, si g est de cette forme, on a alors si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$g(x+y) = \phi(a(x+y)) = \phi(ax+ay) = \frac{\phi(ax)+\phi(ay)}{1+\phi(ax)\phi(ay)} = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

Les fonctions continues qui vérifient (R) sont donc exactement les fonctions de la forme :

$$g(x) = \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$$

où $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 5. *Injections, surjections, bijections*

1. On note $Id_E : E \to E$ l'application telle que $\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = Id_E$. Montrer que f est bijective.

   Montrons d'abord l'injectivité en prouvant, pour $(x_1, x_2) \in E^2$, que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. On suppose donc que $f(x_1) = f(x_2)$ donc $f(f(f(x_1))) = f(f(f(x_2)))$.

   Ainsi, puisque $f \circ f \circ f = Id_E$, $x_1 = x_2$.

   Montrons maintenant la surjectivité de $f : E \to E$. Soit donc $y \in E$, on doit prouver qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $f(f(f(y))) = y$ donc $x = f(f(y))$ est un antécédent de y par f.

   Puisque f est injective et surjective, c'est une bijection.

2. Injectivité :

   Prouvons que ϕ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

   Si $A \cup B \neq E$, on a $x \in E$ qui n'appartient ni à A ni à B donc :

   $$\phi(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset);$$

   $$\phi(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset);$$

   et l'on voit donc que ϕ n'est pas injective. Par contraposée, on a déjà prouvé que si ϕ est injective, alors $A \cup B = E$.

   Prouvons maintenant la réciproque, soient donc A et B deux parties de E telles que $A \cup B = E$. Dans ce cas, si $X \in \mathcal{P}(E)$, prouvons que l'on a :

   $$X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$$

   Si $x \in X$, puisque $A \cup B = E$ on est toujours dans au moins l'un de ces deux cas :
   — si $x \in A$ alors $x \in (X \cap A)$ donc $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$;
   — si $x \in B$ alors $x \in (X \cap B)$ donc $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$.
   La première inclusion est prouvée, si maintenant $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$, dans les deux cas possibles on a bien $x \in X$ donc la deuxième inclusion est triviale.

   Si $A \cup B = E$, pour prouver l'injectivité, supposons maintenant que deux parties X_1 et X_2 vérifient $\phi(X_1) = \phi(X_2) = (C, D)$. Alors on vient de voir que $X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = C \cup D$ et de même $X_2 = C \cup D$ donc $X_1 = X_2$.

3. Surjectivité :

   Prouvons que ϕ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

   Si $A \cap B \neq \emptyset$, soit $x \in A \cap B$. Alors $(\{x\}, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent X par ϕ car il est impossible que $X \cap A = \{x\}$ et $X \cap B = \emptyset$ puisque $x \in B$. Donc ϕ n'est pas surjective et l'on a prouvé par contraposée que si ϕ est surjective, alors $A \cap B = \emptyset$.

   Supposons maintenant que $A \cap B = \emptyset$, prouvons que ϕ est surjective. Soit donc $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, notons alors $X = A' \cup B'$. Il est clair que $X \cap A = A'$ et $X \cap B = B'$ puisque A' et B' sont inclus respectivement dans A et B eux même disjoints. Donc $\phi(X) = (A', B')$ et la surjectivité est prouvée.