
Devoir surveillé

Exercice 1. *Echauffement*

On note $\omega = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

1. Calculer ω^2 , ainsi que son module et un argument.
2. Déterminer alors la forme trigonométrique de ω .
3. Calculer ω^8 .

Exercice 2. *Equations dans $\mathbb{C}$ non bis*

1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées dans $\mathbb{C}$ du nombre :

$$D = -5 - 12i$$

2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2}z^2 - z + 3 + 6i = 0$$

3. Résoudre enfin l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right) + 1 = 0$$

Exercice 3. *Equations dans $\mathbb{C}$ bis*

1. Résoudre l'équation $z^3 = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, résoudre l'équation $(z-1)^n = z^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
(b) Justifier que toutes les solutions de l'équation précédente sont les affixes de points alignés sur une même droite.

Indication : donner la forme algébrique des solutions.

3. Décrire l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie que les points d'affixes z , $\frac{1}{z}$ et z^2 sont alignés.

Exercice 4. *Racines septièmes de l'unité*

On note $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et :

$$S = u + u^2 + u^4, T = u^3 + u^5 + u^6.$$

1. (a) Que vaut u^7 ? Comparer $\bar{u}$ et $\frac{1}{u}$.
(b) En déduire que les complexes S et T sont conjugués.
(c) Justifier sans évaluation numérique que la partie imaginaire de S est positive.
2. (a) Simplifier la somme $S + T$.
(b) Développer et calculer le produit $S \times T$.
(c) En déduire la valeur de S et celle de T .

3. (a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^6 (-u^2)^k = -i \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

(b) Justifier :

$$2(u^2 - u^5) = 4i \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

(c) En déduire :

$$4 \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \sqrt{7}.$$

Exercice 5. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n , on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
2. Prouver que l'on a pour tout n :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Indication : on pourra intégrer par parties, avec $\cos^{n+2} t = \cos t \cos^{n+1} t$.

Exercice 6. Equations différentielles

1. Décrire l'ensemble des solutions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y' + \cos(x)y = 2 \cos(x)$$

2. On s'intéresse dans cette question aux solutions réelles de l'équation :

$$(E) \quad y'' - 4y' + 5y = e^x + \cos x$$

- (a) Préciser l'équation homogène associée, et l'ensemble de ses solutions réelles.
- (b) Déterminer une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la première équation, et $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la deuxième :

$$y_1'' - 4y_1' + 5y_1 = e^x \tag{1}$$

$$y_2'' - 4y_2' + 5y_2 = \cos x \tag{2}$$

En déduire une solution particulière y_p de (E)

- (c) Décrire l'ensemble des solutions de (E), et préciser la solution y vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.