Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Echauffement*

On note $\omega = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Calculer ω^2, ainsi que son module et un argument.

$$\omega^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$
$$\omega^2 = 2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$\omega^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$
$$\omega^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$
$$\omega^2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\omega^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

   ω^2 est de module 4 et $-\frac{\pi}{4}$ en est un argument.

2. Déterminer alors la forme trigonométrique de ω.
   Les deux racines carrées du nombre ω^2 sont $2e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $-2e^{-i\frac{\pi}{8}}$. On en déduit que $\omega = -2e^{-i\frac{\pi}{8}}$ puisque sa partie réelle est négative :

$$\omega = 2e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{8}}$$
$$\omega = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$$

3. Calculer ω^8.

$$\omega^8 = 2^8 e^{8i\frac{7\pi}{8}}$$
$$\omega^8 = 256e^{i7\pi}$$
$$\omega^8 = 256(-1)^7$$
$$\omega^8 = -256$$

Exercice 2. *Equations dans $\mathbb{C}$ **non bis***

1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées dans $\mathbb{C}$ du nombre :

$$D = -5 - 12i$$

   On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a+ib)^2 = -5-12i$, c'est à dire vérifiant :

$$\begin{cases} (1)\, a^2 - b^2 = -5 \\ (2)\, 2ab = -12 \end{cases}$$

   Avec la condition que $|a+ib|^2 = \sqrt{5^2+12^2}$, i.e. $(3)\, a^2+b^2 = 13$, on obtient en ajoutant ou soustrayant (3) et (1) : $a^2 = 4$ et $b^2 = 9$. Puisque a et b sont de signes opposés d'après (2), on a donc : $2-3i$ et $-2+3i$ sont les deux racines carrées de $-5-12i$.

2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2}z^2 - z + 3 + 6i = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut :

$$\Delta = (-1)^2 - 4\frac{1}{2}(3+6i)$$
$$\Delta = -5 - 12i$$

L'équation a donc deux solutions :

$$z_1 = 1 - 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + 2 - 3i$$
$$z_1 = -1 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = 3 - 3i$$

3. Résoudre enfin l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right) + 1 = 0$$

L'énoncé sous-entend que $z \neq 1$, et si l'on pose $Z = \frac{z+1}{z-1}$, z est solution de l'équation si et seulement si :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0.$$

On sait que les solutions de cette équation sont les racines quatrièmes de l'unité sauf 1, donc : -1, i et $-i$. Ainsi z est solution de l'équation de départ dans les cas suivants :

(a) $\frac{z+i}{z-i} = -1$

$$z + 1 = -z - 1$$
$$z = -1$$

(b) $\frac{z+1}{z-1} = -i$

$$z + 1 = -iz + i$$
$$(1+i)z = -1 + i$$
$$z = i$$

(c) $\frac{z+1}{z-1} = i$

$$z + 1 = iz - i$$
$$(1-i)z = -1 - i$$
$$z = -i$$

L'équation a donc trois solutions : -1, i et $-i$.

Exercice 3. *Equations dans* $\mathbb{C}$ ***bis***

1. Résoudre l'équation $z^3 = \bar{z}$ (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Commençons par regarder le module $|z|$: si z est solution de (E), alors on a $|z|^3 = |z|$ donc $|z|(|z|^2 - 1) = 0$, i.e. $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.
Réciproquement, si $|z| = 0$, $z = 0$ est bien solution de (E).
Cherchons enfin les solutions unimodulaires sous la forme $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. L'équation équivaut alors à : $e^{3i\theta} = e^{-i\theta}$, i.e. $3\theta \equiv -\theta[2\pi]$, $4\theta \equiv 0\,[2\pi]$ donc finalement $\theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$: on a quatre solutions $z = 1$, $z = i$, $z = -1$ et $z = -i$.
L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \{0, 1, -1, i, -i\}.$$

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, résoudre l'équation $(z-1)^n = z^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Clairement, 0 n'est pas solution de l'équation donc elle équivaut à $z \neq 0$ et $\left(\frac{z-1}{z}\right)^n = 1$. La description des racines n-ièmes de l'unité nous donne à priori n solutions de cette équation :

$$\frac{z-1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ , \ k \in [\![0, n-1]\!]$$
$$z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 1 \ , \ k \in [\![0, n-1]\!]$$

Pour $k = 0$, cette équation n'a pas de solution. L'ensemble des solutions est donc décrit par :

$$z = \frac{1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \ , \ k \in [\![1, n-1]\!]$$
$$z = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)} \ , \ k \in [\![1, n-1]\!]$$
$$z = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \ , \ k \in [\![1, n-1]\!]$$
$$z = \frac{i}{2}\frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \ , \ k \in [\![1, n-1]\!]$$
$$z = \frac{i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} - i\right) \ , \ k \in [\![1, n-1]\!]$$
$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \ , \ k \in [\![1, n-1]\!]$$

(b) Montrer que toutes les solutions de l'équation précédente sont les affixes de points alignés sur une même droite parallèle à l'axe des imaginaires purs : on remarque tout simplement que les solutions de l'équation précédente ont toutes pour partie réelle $\frac{1}{2}$, elles sont donc alignées sur une droite verticale.
Remarque : cette droite ne dépend pas de n.

3. Décrire l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie que les points d'affixes z, $\dfrac{1}{z}$ et z^2 sont alignés.
Les points sont alignés si et seulement si $z^2 = z$, i.e. $z = 0$ ou $z = 1$, ou alors si $z \neq 0$, $z \neq 1$ et $\frac{z - \frac{1}{z}}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$. On suppose dorénavant $z \neq 0$ et $z \neq 1$.
On a $\dfrac{z - \dfrac{1}{z}}{z^2 - z} = \dfrac{\dfrac{z^2-1}{z}}{z^2 - z} = \dfrac{(z-1)(z+1)}{z^2(z-1)} = \dfrac{z+1}{z^2}$. Les points sont donc alignés si et seulement si :

$$\frac{z+1}{z^2} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}^2}$$
$$(z+1)\bar{z}^2 = (\bar{z}+1)z^2$$
$$z\bar{z}^2 - \bar{z}z^2 = z^2 - \bar{z}^2$$
$$z\bar{z}(\bar{z} - z) = (z - \bar{z})(z + \bar{z})$$

Ainsi, les point sont alignés si et seulement si $z = \bar{z}$ ou si $z\bar{z} = -z - \bar{z}$. La deuxième équation équivaut à $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$ i.e. $|z+1|^2 = 1$. L'ensemble des solutions est donc constitué de la droite réelle et du cercle de centre -1 et de rayon 1.

Exercice 4. *Racines septièmes de l'unité*

On note $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et :

$$S = u + u^2 + u^4 \ , \ T = u^3 + u^5 + u^6.$$

1. (a) Que vaut u^7 ? Comparer $\overline{u}$ et $\frac{1}{u}$.
   $u^7 = 1$, et l'on sait que u est de module 1 donc $u\overline{u} = 1$ d'où $\overline{u} = \frac{1}{u}$.

   (b) En déduire que les complexes S et T sont conjugués.
   On déduit de la question précédente :

$$\overline{S} = u^7 \left(\overline{u + u^2 + u^4}\right)$$

$$\overline{S} = u^7 \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}\right)$$

$$\overline{S} = u^6 + u^5 + u^3$$

$$\overline{S} = T$$

   (c) Justifier sans évaluation numérique que la partie imaginaire de S est positive :

$$\text{Im } (S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

   Or pour tout réel x, on a $\sin(\pi + x) = -\sin x$ d'où :

$$\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

$$\text{Im } (S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

   Enfin, on déduit de la stricte croissance de sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$ et du fait que sin est à valeurs strictement positives sur $]0, \pi[$ que $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$. Ainsi, on a bien $\text{Im } (S) > 0$.

2. (a) Simplifier la somme $S + T$. Comme u est une racine 7-ième de l'unité autre que 1, on sait que :

$$1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = 0$$

$$u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = -1$$

$$S + T = -1.$$

   (b) Développer et calculer le produit $S \times T$.

$$ST = (u + u^2 + u^3)T$$

$$ST = uT + u^2T + u^3T$$

$$ST = u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{10}$$

$$ST = u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + 1 + u^2 + u^3$$

$$ST = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + 2$$

$$ST = 2$$

(c) En déduire la valeur de S et celle de T.

Connaissant la somme et le produit des deux nombres S et T, on sait qu'ils sont les deux racines du polynôme :

$$P(x) = x^2 + x + 2.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = -7$ d'où l'on déduit que les deux racines sont $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. Enfin, puisque Im $(S) > 0$, on a :

$$S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } T = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$

3. (a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = -i\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = (-u^2)\left(1 + (-u^2) + (-u^2)^2 + \cdots + (-u^2)5\right)$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = (-u^2)\frac{1-(-u^2)^6}{1-(-u^2)}$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = (-u^2)\frac{1-u^{12}}{1+u^2}$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = (-u^2)\frac{1-u^{5}}{1+u^2}$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = \frac{-u^2+u^7}{1+u^2}$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = \frac{u(\bar{u}-u)}{u(\bar{u}+u)}$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = \frac{\bar{u}-u}{\bar{u}+u}$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = \frac{-2i\text{Im }(u)}{2\text{Re }(u)}$$

Et l'on en déduit le résultat attendu.

(b) Justifier :

$$2(u^2 - u^5) = 4i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

On a :

$$u^2 - u^5 = u^2 - \frac{u^5}{u^7} = u^2 - \left(\frac{1}{u}\right)^2 = u^2 - \bar{u}^2 = 2i\text{Im }(u^2)$$

Ainsi :

$$2(u^2 - u^5) = 2 \times 2i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) = 4i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

(c) En déduire :

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \sqrt{7}.$$

On a en effet d'après les deux questions précédentes :

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \mathrm{Im}\ \left(2u^2 - 2u^5 + \sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k\right)$$

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \mathrm{Im}\ \left(2u^2 - 2u^5 - u^2 + u^4 - u^6 + u^8 - u^{10} + u^{12}\right)$$

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \mathrm{Im}\ \left(2u^2 - 2u^5 - u^2 + u^4 - u^6 + u - u^3 + u^5\right)$$

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \mathrm{Im}\ \left(u^2 - u^5 + u^4 - u^6 + u - u^3\right)$$

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \mathrm{Im}\ \left(S - T\right).$$

Or $S - T = i\sqrt{7}$ d'où la formule demandée.

Exercice 5. *Intégrales de Wallis*

Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ \mathrm{dt}.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

   $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ \mathrm{dt} = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, on linéarise ensuite $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$ pour calculer :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2} \ \mathrm{dt}$$

$$I_2 = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4}$$

2. Suivant l'indication, on obtient :

$$I_{n+2} = [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-\sin t)(n+1)\cos^n t \ \mathrm{dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \ \mathrm{dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \text{ dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Exercice 6. *Equations différentielles*

1. Décrire l'ensemble des solutions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y' + \cos(x)y = 2\cos(x)$$

On remarque tout d'abord qu'une solution particulière de l'équation est donnée par la fonction constante $y_p = 2$.
Étudions alors l'quation homogène associée :

$$(E_h)\ y' + \cos(x)y = 0$$

Une primitive de $a(t) = \cos x$ est $A(x) = \sin x$ donc l'ensemble des solutions réelles de E_h est $\left\{y : t \mapsto Ce^{-\sin x} \mid C \in \mathbb{R}\right\}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est :

$$\mathcal{S} = \left\{y : x \mapsto Ce^{-\sin x} + 2 \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. On s'intéresse dans cette question aux solutions réelles de l'équation :

$$(E)\ \ y'' - 4y' + 5y = e^x + \cos x$$

(a) L'équation homogène associée est $(E_h)\ \ y'' - 4y' + 5y = 0$, de polynôme caractéristique :

$$P(r) = r^2 - 4r + 5 = 0$$

Les racines du polynôme caractéristique sont $r = 2 + i$ et $r = 2 - i$, donc l'ensemble des solutions de (E_h) est $\{y : x \mapsto e^{2x}(\alpha\cos x + \beta\sin x)\ \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

(b) Déterminer une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la première équation, et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la deuxième :

$$y_1'' - 4y_1' + 5y_1 = e^x \tag{1}$$
$$y_2'' - 4y_2' + 5y_2 = \cos x \tag{2}$$

Pour y_1, comme $e^x = e^{1x}$ et que 1 n'est pas racine de P, on cherche y_1 sous la forme $y_1(x) = \alpha e^x$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule alors $y_1'(x) = \alpha e^x$, $y_1''(x) = \alpha e^x$ donc $y_1'' - 4y_1' + 5y_1 = 2\alpha e^x$. Il suffit de choisir $\alpha = \frac{1}{2}$, et $y_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ convient.
Pour y_2, on cherche une solution complexe $y_{2\mathbb{C}}$ de l'équation $y_{2\mathbb{C}}'' - 4y_{2\mathbb{C}}' + 5y_{2\mathbb{C}} = e^{ix}$. Puisque i n'est pas racine de P, on cherche sous la forme $y_{2\mathbb{C}}(x) = \lambda e^{ix}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Un calcul simple donne alors $y_{2\mathbb{C}}'' - 4y_{2\mathbb{C}}' + 5y_{2\mathbb{C}} = (4-4i)\lambda e^{ix}$. On choisit :

$$\lambda = \frac{1}{4-4i} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-i} = \frac{1}{8}(1+i)$$

Alors la fonction suivante convient :

$$y_2(x) = \text{Re }\ (y_{2\mathbb{C}}(x))$$

$$y_2(x) = \mathrm{Re}\,\left(\frac{1}{8}(1+i)(\cos x + i\sin x)\right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{8}(\cos x - \sin x)$$

convient.

D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) est :

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{8}(\cos x - \sin x)$$

(c) Décrire l'ensemble des solutions de (E), et préciser la solution y vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

On déduit alors de l'étude précédente l'ensemble des solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{8}(\cos x - \sin x) + e^{2x}\left(\alpha \cos x + \beta \sin x\right) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Pour préciser la solution y vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$, on calcule $y(0) = \frac{5}{8} + \alpha$ et $y'(0) = \frac{3}{8} + 2\alpha + \beta$. On trouve $\alpha = -\frac{5}{8}$ et $\beta = \frac{7}{8}$, c'est à dire :

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{8}(\cos x - \sin x) + e^{2x}\left(-\frac{5}{8}\cos x + \frac{7}{8}\sin x\right)$$