Devoir surveillé

1 Irrationalité du nombre π

1. Montrer la propriété suivante par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour toute fonction polynôme de la forme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ où $(q_0, q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:
$$Q^{(k)}(0) = k! q_k$$
où $Q^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de Q.
2. Si Q est une fonction polynôme de la forme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$, on note :
$$J(Q) = \int_0^\pi Q(x) \sin x \, \mathrm{d}x$$
   (a) Si $Q(x) = q_1 x + q_0$ est de degré 1, montrer que $J(Q) = Q(0) + Q(\pi)$.
   (b) Si $Q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0$ est de degré 2, montrer que $J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - Q''(0) - Q''(\pi)$.
   (c) Prouver que pour toute fonction polynôme Q, on a :
$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - \int_0^\pi Q''(x) \sin x \, \mathrm{d}x$$
   (d) Montrer par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ la propriété :
   pour tout $n \leq 2N+1$ et tout polynôme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ de degré inférieur ou égal à n, $J(Q) = \sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \left(Q^{(2k)}(0) + Q^{(2k)}(\pi)\right)$.
3. Dans cette question et la suivante, on s'intéresse à la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $P_n(x) = \dfrac{1}{n!} x^n (qx - p)^n$ où p, q sont deux entiers strictement positifs.
   (a) Calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton les coefficients $(a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n})$ tels que $P_n(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
   (b) Montrer alors que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
   (c) Comparer, pour $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ et $P_n(\frac{p}{q} - x)$.
   Montrer que l'on a pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $P_n^{(k)}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}$.
   (d) Déterminer le maximum de la fonction $f(x) = x(p - qx)$ pour $x \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$, et montrer alors que l'on a :
$$\max_{x \in \left[0, \frac{p}{q}\right]} |P_n(x)| = \frac{1}{n!} \left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$$
4. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que π est rationnel, donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ où $(p,q) \in {\mathbb{N}^*}^2$. On définit alors la suite P_n comme à la question précédente, et l'on s'intéresse à la suite d'intégrales :
$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, \mathrm{d}x$$
On admet que le résultat de la question 3(d) permet de prouver que $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \in \mathbb{Z}^*$ puis conclure.

2 Une inéquation fonctionnelle, Suède 1962.

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels :

$$|f(y) - f(x)| \leq 7(x-y)^2.$$

1. On considère deux nombres x et y réels tels que $x < y$. Si l'on coupe l'intervalle $[x, y]$, en $n \in \mathbb{N}^*$ parties de même largeur, selon un découpage $x_0 = x$, x_1, x_2,...,$x_n = y$, préciser pour tout entier k entre 0 et n l'expression de x_k en fonction de k, x et y.
2. On considère une fonction f qui est solution de notre problème. Avec les hypothèses et notations de la question précédente, on note pour tout k entier entre 1 et n : $a_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Que vaut la somme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$?
3. A l'aide des questions précédentes, montrer que si x et y sont des réels tels que $x < y$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x-y)^2}{n}.$$
4. Avec les hypothèses de la question précédente, montrer que $|f(y) - f(x)| = 0$.
5. Conclure.