Devoir surveillé

Exercice 1. *Premier exemple d'analyse-synthèse, Slovénie* 1999.

On cherche à préciser quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient pour tous x et y réels :

$$f\left(x - f(y)\right) = 1 - x - y.$$

Indications :
- On pourra commencer par supposer qu'une fonction f donnée vérifie cette équation fonctionnelle, puis montrer alors que l'on a une constante a telle que pour tout nombre t réel, $f(t) = a - t$.
- On pourra alors regarder à quelle(s) condition(s) sur le réel a la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = a - x$ est effectivement une solution de l'équation fonctionnelle.

Exercice 2. *Logique mathématique*

1. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes (où f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), puis leurs négations :
   (a) f est la fonction nulle ;
   (b) f est l'identité de $\mathbb{R}$;
   (c) f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. Montrer l'égalité suivante :
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$
3. Démontrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\setminus\{-3\} & \to & \mathbb{C}\setminus\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$
est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3. *Sommes doubles*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{0 \leq i,j \leq n} (i + j)$$
$$S_2 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (i + j)$$
$$S_3 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} (i + j)$$

Exercice 4. *Approximation du nombre d'or.*

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1+\phi}$.

1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   et ainsi de suite,

$$u_n = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   avec n radicaux.
   Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 \leq u_n \leq \phi.$$

4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
   Indication : on pourra utiliser le fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$