Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Premier exemple d'analyse-synthèse, Slovénie* 1999.

On cherche à préciser quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient pour tous x et y réels :

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

— On commence par l'analyse du problème : soit f une fonction qui en est solution. On a alors, si $x \in \mathbb{R}$, pour $y = 0$:

$$f(x - f(0)) = 1 - x.$$

Si $t \in \mathbb{R}$, on obtient alors pour $x = t + f(0)$:

$$f(t) = 1 - (t + f(0)) = 1 + f(0) - t.$$

Ainsi, en posant $a = 1 + f(0)$, on a pour tout nombre t réel : $f(t) = a - t$.

— On considère alors une valeur $a \in \mathbb{R}$, et on cherche à quelle(s) condition(s) sur le réel a la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = a - x$ est effectivement une solution de l'équation fonctionnelle. Ceci est le cas s.si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a - (x - (a - y)) = 1 - x - y.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a - x + a - y = 1 - x - y.$$

$$a = \frac{1}{2}$$

On en déduit que le problème a une unique solution, la fonction f telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2} - x.$$

Exercice 2. *Logique mathématique*

1. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes (où f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), puis leurs négations :
   (a) f est la fonction nulle : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
   Négation :$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
   (b) f est l'identité de $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$. Négation :$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x$.
   (c) f est croissante sur $\mathbb{R}$: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Négation : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$.
2. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. Montrer l'égalité suivante :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

On procède en deux étapes :

— On prouve $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Soit $x \in A \setminus (B \cap C)$, on a donc $x \in A$ et $x \notin (B \cap C)$. $x \notin (B \cap C)$ est le contraire de $x \in B$ et $x \in C$ donc cela signifie $x \notin B$ ou $x \notin C$. On est donc dans l'un des deux cas suivants :
  — Si $x \notin B$, on a donc puisque $x \in A$: $x \in A \setminus B$.
  — Si $x \notin C$, on a donc puisque $x \in A$: $x \in A \setminus C$.
Dans les deux cas, on a bien $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

— On prouve $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$.
Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, on est alors dans l'un des deux cas suivants :
  — Si $x \in (A \setminus B)$, alors $x \in A$ et $x \notin B$ donc $x \notin B \cap C$.
  — Si $x \in (A \setminus C)$, alors $x \in A$ et $x \notin C$ donc $x \notin B \cap C$.
Dans les deux cas, on a bien $x \in A \setminus (B \cap C)$.

3. Démontrer que l'application
$$f : \mathbb{C}\backslash\{-3\} \to \mathbb{C}\backslash\{i\}$$
$$z \mapsto \tfrac{iz-i}{z+3}$$
est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.
Soit $y \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$, alors $z \in \mathbb{C}\backslash\{-3\}$ en est un antécédent si et seulement si :
$$\frac{iz-i}{z+3} = y$$
$$iz - i = y(z+3)$$
$$(i-y)z = 3y + i$$
$$z = \frac{3y+i}{i-y}.$$
Ainsi, y admet un unique antécédent $z = \frac{3y+i}{i-y}$ dont on vérifie aisément qu'il est différent de -3 en résolvant :
$$\frac{3y+i}{i-y} = -3$$
$$3y + i = 3y - 3i$$
$$i = -3i.$$
La fonction f est bien bijective de réciproque :
$$f^{-1} : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}\backslash\{-3\}$$
$$z \mapsto \tfrac{3z+i}{i-z}$$

Exercice 3. *Sommes doubles*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculons les sommes suivantes :
$$S_1 = \sum_{0 \leq i,j \leq n} (i+j)$$
$$S_1 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(i+j)$$
$$S_1 = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} j\right)$$
$$S_1 = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)j\right)$$
$$S_1 = \sum_{j=0}^{n}\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\sum_{j=0}^{n} j$$
$$S_1 = \frac{n(n+1)^2}{2} + (n+1)\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_1 = n(n+1)^2$$

$$S_2 = \sum_{0\le i\le j\le n}(i+j)$$
$$S_2 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(i+j)$$
$$S_2 = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} i + \sum_{i=0}^{j} j\right)$$
$$S_2 = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + (j+1)j\right)$$
$$S_2 = \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{n}(j^2+j)$$
$$S_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)\right)$$
$$S_2 = \frac{1}{4}n(n+1)(2n+4)$$
$$S_2 = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$$

$$S_3 = \sum_{0\le i<j\le n}(i+j)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}(i+j)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j-1} i + \sum_{i=0}^{j-1} j\right)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2} + j^2\right)$$
$$S_3 = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{3}{2}j^2 - \frac{1}{2}j\right)$$
$$S_3 = \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_3 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)(2n+1) - n(n+1)\right)$$
$$S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)2n$$
$$S_3 = \frac{1}{2}n^2(n+1)$$

Exercice 4. *Approximation du nombre d'or.*

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1+\phi}$.

1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
   La fonction $h : x \mapsto x^2 - x - 1$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Puisque $h(0) = -1$, $h(1) = -1$ et $h(2) = 1$, elle ne s'annule qu'une seule fois dans $\mathbb{R}_+$, en un point de l'intervalle $]1, 2[$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

et ainsi de suite,

$$u_n = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

avec n radicaux.
Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n.
On a tout simplement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 \leq u_n \leq \phi.$$

On prouve ceci par récurrence. Pour $n = 1$, $u_1 = 1$ donc la propriété est vraie.
Supposons maintenant que la propriété est vraie au rang n, c'est à dire que $1 \leq u_n \leq \phi$. On en déduit par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+0} \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+\phi},$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq \phi.$$

Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut prouver que $u_{n+1} \geq u_n$, i.e. $\sqrt{1+u_n} \geq u_n$. Puisque les deux nombres sont positifs, cela revient à prouver que :

$$1 + u_n \geq u_n^2,$$

$$0 \geq u_n^2 - u_n - 1,$$

$$0 \geq h(u_n).$$

Ceci est vrai car la croissance de h sur l'intervalle $[1, \phi]$ et le fait que $u_n \in [1, \phi]$ nous garantit que :

$$h(1) \leq h(u_n) \leq h(\phi),$$

$$-1 \leq h(u_n) \leq 0.$$

5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
Indication : on pourra utiliser le fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
(u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ car c'est une suite croissante et majorée d'après les deux questions précédentes.
Par passage des inégalités larges à la limite, on a $1 \leq l \leq \phi$.
Suivant l'indication, on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, or $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+l}$. Par unicité de la limite, on en déduit que $l = \sqrt{1+l}$. ϕ est le seul nombre positif qui vérifie ceci donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$.

6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

On calcule pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right|,$$

$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{\left(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right)\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}\right|,$$

$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{u_n - \phi}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}\right|,$$

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}.$$

7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$
On prouve enfin ceci par récurrence. Pour $n = 1$, ceci découle du fait que $u_1 = 1$ et $\phi \in [1, 2]$. Supposons maintenant que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente :
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}.$$
La propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.