

Devoir à la maison

On étudie dans ce devoir la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Etude de la convergence de la suite x

1. Quelle propriété simple vérifie la suite (x_n) vous permettant d'affirmer qu'elle a nécessairement une limite, finie ou infinie ?
2. Montrer que l'on a pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2}$$

3. Calculer la somme suivante pour $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} \right)$$

4. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Etude de fonctions

5. A l'aide d'études de fonctions, démontrer les inégalités suivantes pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\sin x < x < \tan x$$

6. Montrer alors que l'on a pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$$

Une formule trigonométrique

7. Par exemple à l'aide de la formule de duplication du sinus, démontrer la formule suivante valable pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi-x}{2}} \right)$$

Etude de la limite de la suite x

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \right)}$$

8. Calculer u_0 .
9. Montrer à l'aide de la formule trigonométrique démontrée précédemment que la suite (u_n) vérifie pour tout $n \geq 1$: $u_n = \frac{1}{4}u_{n+1}$.
Indication : On pourra couper la somme en deux à l'aide de la formule évoquée ci-dessus, puis faire le changement de variable $j = 2^{n+1} - 1 - k$ dans la deuxième partie de la somme.
10. Calculer u_n en fonction de n
11. Montrer que l'on a l'inégalité suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 2^n \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{4^{n+2}}{(2k+1)^2 \pi^2} \leq u_n$$

12. Dédurre des deux questions précédentes un encadrement de x_{2^n-1} si $n \in \mathbb{N}$.
Montrer la convergence de la suite $(x_{2^n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
13. Conclure concernant la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.