Devoir surveillé

Exercice 1. *Nature de suites.*

Étudier la nature des suites suivantes (convergentes ou divergentes), et déterminer leur limite éventuelle :

1. $$u_n = \frac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}.$$

   On sait que $|\sin(n)| \leq 1$ et $|\cos\left(n^2\right)| \leq 1$ donc d'après l'inégalité triangulaire :

   $$|u_n| \leq \frac{|\sin(n)| + 3|\cos\left(n^2\right)|}{\sqrt{n}},$$

   $$|u_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$$

   On en déduit que (u_n) converge vers 0.

2. $$u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}},$$

   $$u_n = \frac{n\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(5 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)},$$

   $$u_n = \frac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{5 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}.$$

   Or $0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ donc $\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   De même, $0 \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ donc $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Ainsi, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{5}$.

3. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

   Or pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ d'où :

   $$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2},$$

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n},$$

   $$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq 1,$$

   $$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 1.$$

   On en déduit enfin que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par encadrement.

4.

$$u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1},$$
$$u_n = \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}},$$
$$u_n = \frac{(2n+1-(2n-1)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)},$$
$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)}.$$

On en déduit par opérations sur les limites que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 2. *Suite presque harmonique*

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$. Elle est dérivable, donc continue, de dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

On en déduit que la dérivée de f est de signe négatif donc que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, or on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1},$$
$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1},$$
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par décroissance de f, on en déduit que toutes les valeurs de f sont positives et l'on a donc si $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 < \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1},$$
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x).$$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}$. Elle est dérivable, donc continue, de dérivée :

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$
$$g'(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}.$$

On en déduit que la dérivée de g est de signe positif donc que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, or on a :

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x},$$
$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x},$$
$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par croissance de g, on en déduit que toutes les valeurs de g sont négatives et l'on a donc si $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x} < 0$$
$$\ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2. On pose
$$v_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$
Démontrer que
$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ or l'inégalité précédente nous assure, pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, que :
$$\ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k} < \ln(k) - \ln(k-1).$$
En ajoutant ces inégalités pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a donc :
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k+1) - \ln(k) \leq v_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) - \ln(k-1).$$
Ces deux sommes sont télescopiques et l'on trouve l'inégalité attendue. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite. On a donc :
$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < v_n < \ln\left(\frac{2n}{n}\right),$$
$$\ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) < v_n < \ln(2).$$
On en déduit $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Exercice 3. *Points fixes des fonctions continues*

1. Montrer que toute fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ qui est continue admet un point fixe, c'est à dire que :
$$\exists c \in [0,1], f(c) = c.$$
Soit f une telle fonction, on introduit alors la fonction :
$$g : [0,1] \to \mathbb{R},$$
$$g : x \mapsto f(x) - x.$$
Puisque $0 \leq f(0)$, on sait que $g(0) \leq 0$.
Puisque $f(1) \leq 1$, on sait aussi que $0 \leq g(1)$.
Ainsi, $0 \in [g(0), g(1)]$ et l'on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à l afonction g qui est continue puisque f l'est : on a donc $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire vérifiant $f(c) = c$.
2. Montrer que toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue et décroissante admet un point fixe, c'est à dire que :
$$\exists! c \in \mathbb{R}, g(c) = c.$$
Soit g une telle fonction, on introduit encore une fois la fonction :
$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$j : x \mapsto g(x) - x.$$
Puisque g est décroissante, on a pour $x \leq 0$:
$$g(0) \leq g(x),$$
$$g(0) - x \leq g(x) - x,$$
$$g(0) - x \leq j(x).$$
Or on sait que $g(0) - x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc on déduit par minoration que $j(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
De même, on a pour $0 \leq x$:
$$g(x) \leq g(0),$$

$$g(x) - x \leq g(0) - x,$$

$$j(x) \leq g(0) - x.$$

Or on sait que $g(0) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc on déduit par majoration que $j(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

La fonction j est ainsi une fonction continue qui prend au moins une valeur négative et une valeur positive. On en déduit qu'il existe au moins un réel c tel que $j(c) = 0$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, c'est à dire un réel c tel que $g(c) = c$.

3. Si une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et que $h \circ h$ admet un point fixe, montrer que h aussi admet un point fixe.

   On suppose donc que h est une telle fonction et l'on note x_0 le point fixe de $h \circ h$. On définit encore une fois la fonction :

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$H : x \mapsto h(x) - x.$$

   On distingue alors trois cas :
   - Si $h(x_0) = x_0$, alors x_0 est un point fixe de h.
   - Si $h(x_0) < x_0$, alors on applique le théorème des valeurs intermédiaires à H sur $[h(x_0), x_0]$:

$$H(h(x_0)) = h(h(x_0)) - h(x_0),$$

$$H(h(x_0)) = x_0 - h(x_0),$$

$$0 < H(h(x_0))$$

     Et l'on a en x_0 :

$$H(x_0) = h(x_0) - x_0,$$

$$H(x_0) < 0.$$

     On a donc un point $c \in [h(x_0), x_0]$ tel que $H(c) = 0$ i.e. tel que $h(c) = c$.
   - Si $x_0 < h(x_0)$, alors on applique le théorème des valeurs intermédiaires à H sur $[x_0, h(x_0)]$ de la même façon que dans le cas précédent.

Exercice 4. *Suites récurrentes*

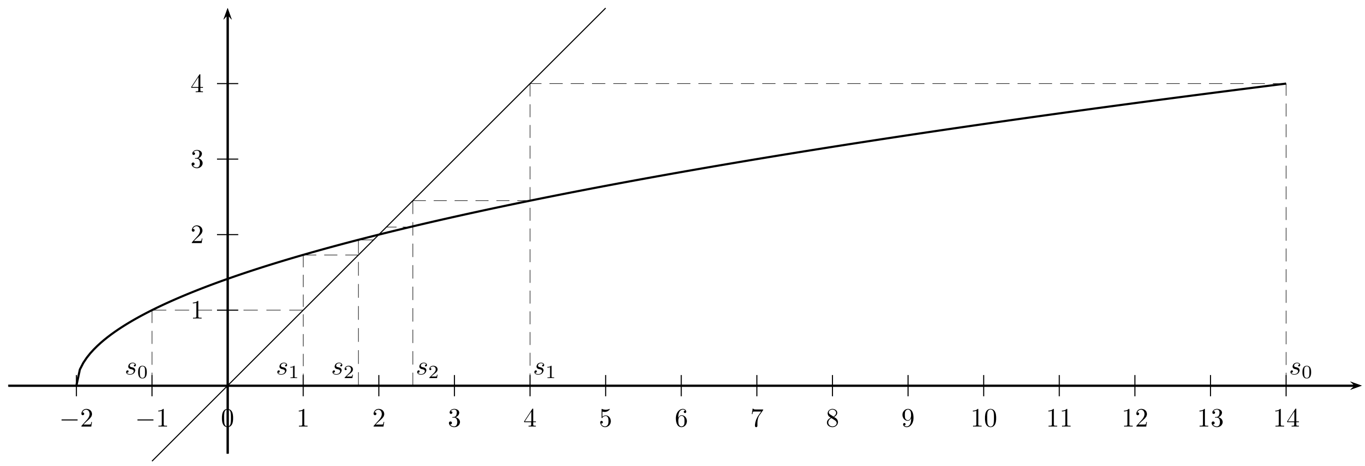
On note $f(x) = \sqrt{2 + x}$ pour tout $x \in I = [-2, +\infty[$.

1. Prouver la stabilité de I par la fonction f.

   f est croissante sur $[-2, +\infty[$ et l'on a $f(-2) = 0$ donc $\forall x \in [-2, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ d'où $f(x) \in [-2, +\infty[$.

   On considère dorénavant la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $s_0 \in I$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_{n+1} = f(s_n)$.

2. Représenter la courbe de f et analyser les différents cas à distinguer selon $s_0 \in I$ pour étudier les variations et la convergence de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sans preuve mais en faisant apparaître chaque cas par la représentation des premiers termes d'une suite à l'aide du graphe).



3. Si $s_0 > 2$, décrire complètement le comportement de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prouvant toutes les assertions.
   - Prouvons d'abord que $]2, +\infty[$ est stable par f. Si $x > 2$, on a $f(x) > f(2)$ par stricte croissance de f donc $f(x) > 2$ et l'intervalle est stable. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in]2, +\infty[$.

— On calcule :

$$F(x) = f(x) - x = \sqrt{2+x} - x = \frac{(\sqrt{2+x}-x)(\sqrt{2+x}+x)}{\sqrt{2+x}+x} = \frac{-x^2+x+2}{\sqrt{2+x}+x}$$

Les racines du trinôme au numérateur sont -1 et 2, donc il est de signe strictement négatif sur $]-2,+\infty[$ et il en est de même de F.
Ainsi, $s_{n+1} - s_n = f(s_n) - s_n = F(s_n) < 0$ donc la suite (s_n) est décroissante.

— (s_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers $l \in [2,+\infty[$. Comme f est continue, l est un point fixe de f c'est à dire que $F(l) = 0$. On a donc $l = 1$ ou $l = 2$ d'après la question précédente, donc $l = 2$.

4. Dans tous les cas, prouver que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |s_{n+1} - 2| \leq \frac{|s_n - 2|}{2}$$

On calcule :

$$s_{n+1} - 2 = \sqrt{2+s_n} - 2$$
$$s_{n+1} - 2 = \frac{(\sqrt{2+s_n}-2)(\sqrt{2+s_n}+2)}{\sqrt{2+s_n}+2}$$
$$s_{n+1} - 2 = \frac{2+s_n-4}{\sqrt{2+s_n}+2}$$
$$|s_{n+1} - 2| = \frac{|s_n - 2|}{\sqrt{2+s_n}+2}$$

Or on a $2 \leq \sqrt{2+s_n}+2$ d'où :

$$|s_{n+1} - 2| \leq \frac{|s_n - 2|}{2}$$

5. Démontrer alors que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |s_n - 2| \leq \frac{|s_0 - 2|}{2^n}$$

On prouve ceci par récurrence sur l'entier n.
Pour $n = 0$, l'inégalité est en fait une égalité qui est vraie.
Prouvons donc l'hérédité de la propriété : on la suppose vraie au rang n.
On a alors d'après la question précédente :

$$|s_{n+1} - 2| \leq \frac{|s_n - 2|}{2}$$
$$|s_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}\frac{|s_0 - 2|}{2^n}$$
$$|s_{n+1} - 2| \leq \frac{|s_0 - 2|}{2^{n+1}}$$

6. On déduit de l'inégalité précédente que $|s_n - 2| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.

Exercice 5. *Corde et tangente*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$. L'objectif de l'exercice est de démontrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

1. Soit $c \in]0,1]$ et soit M le point de coordonnées $(c, f(c))$. Rappeler une équation de la tangente à la courbe représentative de f en M :

$$y = f'(c)x + f(c) - cf'(c).$$

ainsi qu'une équation de la corde reliant $(0, f(0))$ à M :

$$y = \frac{f(c) - f(0)}{c}x + f(0).$$

Donner une interprétation géométrique du résultat que l'on veut démontrer, et illustrer le sur un dessin.
On veut prouver qu'il existe un point $c \in]0,1[$ en lequel la tangente à la courbe est confondue avec sa corde entre les points d'abscisses 0 et c

2. On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et par $g(0) = 0$. Vérifier que g est continue sur $[0,1]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.
   g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ car c'est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'il est bien défini sur cet intervalle.
   En 0, la fonction g est continue puisque :
   $$\forall x \in]0,1],\ g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f'(0) = 0 = g(0).$$

3. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0,1]$.
   $$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}.$$

4. Démontrer le résultat dans le cas $f(1) = 0$.
   Dans ce cas, on a $g(0) = g(1) = 0$, donc on peut appliquer le lemme de Rolle à la fonction g dont on vient de vérifier qu'elle remplissait les conditions de ce lemme.
   Ainsi, on a un point $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$ d'où :
   $$f'(c)c - f(c) = 0 \text{ i.e. } f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

5. Dans cette question, on suppose que $f(1) > 0$.
   (a) Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.
   $g(0) = 0$, $g(1) = f(1)$, $g'(1) = -f(1)$
   (b) En déduire que g' s'annule sur $]0,1[$ et conclure.
   Le T.A.F. appliqué à la fonction g nous dit qu'il y a un point $d \in]0,1[$ tel que :
   $$g'(d) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}$$
   $$g'(d) = f(1).$$
   Puisque g' est continue sur $]d,1]$, que $g'(d) = f(1) > 0$ et que $g'(1) = -f((1) < 0$, on déduit du T.V.I. qu'il existe un point $c \in]d,1[$ tel que $g'(c) = 0$ d'où :
   $$f'(c)c - f(c) = 0 \text{ i.e. } f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

6. Comment procéder si $f(1) < 0$?
   On peut appliquer le même raisonnement à la fonction $-f$.