Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Etude de suites et équation fonctionnelle*

On admettra le résultat suivant : les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)\ (L)$$

sont exactement les fonctions linéaires, c'est à dire les fonctions pour lesquelles il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax.$$

1. Dans cette question, on considère une fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que :

$$\forall (x,y) \in]0, +\infty[^2,\ g(xy) = g(x) + g(y)\ (K).$$

   (a) On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(e^x).$$
   Montrer que f vérifie alors la relation (L).
   On a en effet si x et y sont réels :
   $$f(x+y) = g(e^{x+y})$$
   $$f(x+y) = g(e^x e^y)$$
   $$f(x+y) = g(e^x) + g(e^y)$$
   $$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

   (b) En déduire g.
   On a donc $a \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$$
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(e^x) = ax.$$
   Ainsi, si $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc pour $x = \ln y$: $g(y) = a\ln(y)$.
   Réciproquement, toute fonction de la forme $g : y \mapsto a\ln(y)$ vérifie bien, si $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$:
   $$g(xy) = a\ln(xy) = a(\ln(x) + \ln(y)) = a\ln(x) + a\ln(y) = g(x) + g(y).$$

2. Soient $0 < a < b$ deux réels strictement positifs, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Etablir l'inégalité suivante :
   $$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}.$$
   On calcule pour $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$:
   $$\frac{2xy}{x+y} - \frac{x+y}{2} = \frac{4xy}{2(x+y)} - \frac{(x+y)^2}{2(x+y)}$$

$$\frac{2xy}{x+y} - \frac{x+y}{2} = \frac{2xy - x^2 - y^2}{2(x+y)}$$
$$\frac{2xy}{x+y} - \frac{x+y}{2} = -\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}.$$

On en déduit :
$$\frac{2xy}{x+y} - \frac{x+y}{2} \leq 0.$$

(b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq v_n.$$

On démontrerait par récurrence que les deux suites sont à termes strictement positifs.
Prouvons maintenant que $u_n \leq v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Au rang $n = 0$, c'est une hypotèse de l'énoncé.
Au rang $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = v_n.$$

En déduire les monotonies des suites u et v.
Puisque $u_n \leq v_n$, on a $u_n + v_n \leq 2v_n$ d'où $u_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \geq \dfrac{2u_nv_n}{2v_n} = u_n$. u est croissante.
Puisque $u_n \leq v_n$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \leq \dfrac{v_n+v_n}{2} = v_n$. v est décroissante.

(c) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

On a $-u_{n+1} \leq -u_n$ donc :
$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

(d) Montrer que les deux suites u et v convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.
On déduit de la question précédente que la propriété $v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ est héréditaire.
Elle est vraie pour $n = 0$, donc pour tout entier n par récurrence.
Ainsi, $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ donc $v_n - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Les suites étant l'une croissante et l'autre décroissante, elles sont donc adjacentes et tendent vers la même limite.

(e) On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sqrt{u_nv_n}.$$

Justifier que la suite w est constante et en déduire que $l = \sqrt{ab}$.
On calcule pour $n \in \mathbb{N}$:
$$w_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_{n+1}} = \sqrt{\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\frac{u_n+v_n}{2}} = \sqrt{u_nv_n} = w_n.$$

w est donc constante en $w_0 = \sqrt{ab}$. Or $w_n = \sqrt{u_nv_n}$ avec u et v convergentes vers $l \geq 0$ donc w converge vers $\sqrt{l^2} = l$. On en déduit $l = \sqrt{ab}$.

3. Dans cette dernière partie de l'exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, continue et telle que :
$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = f(x) + f(y)\ (E).$$

(a) Montrer que si f est une solution de (E), alors la fonction $h = f - f(1)$ est solution de (E).
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, on calcule :

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) + h\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(1) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) - f(1)$$

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) + h\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = f(x) + f(y) - 2f(1);$$

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) + h\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = h(x) + h(y).$$

On suppose donc désormais que $f(1) = 0$.

(b) Soient $0 < a < b$ deux réels positifs, u et v les suites définies à la question 2., on définit alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = f(u_n) + f(v_n).$$

Montrer que la suite z est constante.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$z_{n+1} = f\left(\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\right) + f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right);$$

$$z_{n+1} = f(u_n) + f(v_n);$$

$$z_{n+1} = z_n.$$

(c) En déduire que pour tous réels positifs $a < b$, on a :

$$2f\left(\sqrt{ab}\right) = f(a) + f(b).$$

D'après la partie précédente, les suites u et v convergent toutes deux vers $\sqrt{ab}$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, puisque $f(u_n) + f(v_n) = f(a) + f(b)$, on a donc $f(\sqrt{ab}) + f(\sqrt{ab}) = f(a) + f(b)$.
Montrer alors que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ 2f\left(\sqrt{a}\right) = f(a).$$

On applique l'égalité précédente avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b = 1$, on obtient $2f(\sqrt{a}) = f(a) + f(1) = f(a)$.

(d) Montrer alors que les solutions générales de (E) sont les fonctions f telles que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \alpha\ln(x) + \beta.$$

Soit f une solution, soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, on a alors en posant $h = f - f(1)$, d'après la fin de la question précédente en remplaçant a par ab :

$$2h(\sqrt{ab}) = h(ab).$$

Or on a aussi vu que h vérifie (E) donc :

$$2h\left(\sqrt{ab}\right) = h(a) + h(b).$$

On conclut que $h(ab) = h(a) + h(b)$ et donc d'après la première partie, h est de la forme $h(x) = \alpha\ln(x)$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ d'où $f(x) - f(1) = \alpha\ln(x)$, i.e. $f(x) = \alpha\ln(x) + f(1)$ ce qui est de la forme attendue avec $\beta = f(1)$.

Reste enfin à vérifier qu'une fonction de ce type est bien une solution. On calcule, pour $f(x) = \alpha \ln(x) + \beta$ et $(x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \alpha \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) + \beta + \alpha \ln\left(\frac{2xy}{x+y}\right) + \beta;$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \alpha \ln\left(\frac{x+y}{2}\frac{2xy}{x+y}\right) + 2\beta;$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \alpha \ln(xy) + 2\beta;$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \alpha \ln(x) + \alpha \ln(y) + 2\beta;$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = f(x) + f(y).$$

Exercice 2. *Équation originale*

Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que l'on a des réels $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

on note E_P l'équation :

$$(E_P)\ P(x) = e^x.$$

On souhaite montrer que (E_P) admet au plus $n+1$ solutions distinctes dans $\mathbb{R}$

1. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annule en $p \geq 2$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ tels que

   $$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_p) = 0,$$

   montrer que f' s'annule en $p-1$ points.
   On suppose que f s'annule ainsi. Pour $1 \leq i \leq p-1$, on peut appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[a_i; a_{i+1}]$ et l'on en déduit qu'il existe $b_i \in]a_i; a_{i+1}[$ tel que $f'(b_i) = 0$. Ceci nous donne $p-1$ valeurs distinctes pour lesquelles f' s'annule.
2. Prouver alors la propriété annoncée au début de l'exercice.
   On prouve cette propriété par récurrence sur n.
   Pour $n = 0$, on a bien qu'une équation du type $a_0 = e^x$, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, admet au plus une solution : si $a0 \leq 0$, il n'y en a pas et si $a_0 > 0$, l'unique solution est $\ln(a_0)$.
   Prouvons maintenant l'hérédité. On suppose la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$.
   Par l'absurde, supposons alors qu'elle n'est pas vraie au rang $n+1$. On a donc des réels $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

   de sorte que l'équation $P(x) = e^x$ admet $n+3$ solutions.
   En posant $f(x) = P(x) - e^x$, ceci signifie que cette fonction f s'annule en $n+3$ points distincts donc sa dérivée s'annule en $n+2$ points. Ceci signifie que l'équation suivante admet $n+2$ solutions :

   $$P'(x) - e^x = 0,$$

   $$(n+1)a_{n+1}x^n + na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 - e^x = 0,$$

   $$(n+1)a_{n+1}x^n + na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 = e^x$$

   Or $Q(x) = (n+1)a_{n+1}x^n + na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, donc cette équation n'a pas plus de $n+1$ solutions par hypothèse de récurrence.
   Cette contradiction nous assure que la propriété est héréditaire, donc vraie pour tout entier n.