Devoir surveillé

Exercice 1. *Etude de suites et équation fonctionnelle*

On admettra le résultat suivant : les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)\ (L)$$

sont exactement les fonctions linéaires, c'est à dire les fonctions pour lesquelles il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax.$$

1. Dans cette question, on considère une fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2,\ g(xy) = g(x) + g(y)\ (K).$$

   (a) On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(e^x).$$

   Montrer que f vérifie alors la relation (L).

   (b) En déduire g.

2. Soient $0 < a < b$ deux réels strictement positifs, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Etablir l'inégalité suivante :

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \frac{2xy}{x + y} \leq \frac{x + y}{2}.$$

   (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq v_n.$$

   En déduire les monotonies des suites u et v.

   (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

   (d) Montrer que les deux suites u et v convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.

   (e) On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sqrt{u_n v_n}.$$

   Justifier que la suite w est constante et en déduire que $l = \sqrt{ab}$.

3. Dans cette dernière partie de l'exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, continue et telle que :

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ f\left(\frac{x + y}{2}\right) + f\left(\frac{2xy}{x + y}\right) = f(x) + f(y)\ (E).$$

(a) Montrer que si f est une solution de (E), alors la fonction $h = f - f(1)$ est solution de (E).

On suppose donc désormais que $f(1) = 0$.

(b) Soient $0 < a < b$ deux réels positifs, u et v les suites définies à la question 2., on définit alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = f(u_n) + f(v_n).$$

Montrer que la suite z est constante.

(c) En déduire que pour tous réels positifs $a < b$, on a :

$$2f\left(\sqrt{ab}\right) = f(a) + f(b).$$

Montrer alors que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ 2f\left(\sqrt{a}\right) = f(a).$$

(d) Montrer alors que les solutions générales de (E) sont les fonctions f telles que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \alpha \ln(x) + \beta.$$

Exercice 2. *Équation originale*

Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que l'on a des réels $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

on note E_P l'équation :

$$(E_P)\ P(x) = e^x.$$

On souhaite montrer que (E_P) admet au plus $n+1$ solutions distinctes dans $\mathbb{R}$

1. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annule en $p \geq 2$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ tels que

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_p) = 0,$$

montrer que f' s'annule en $p-1$ points.

2. Prouver alors la propriété annoncée au début de l'exercice.

Indication : On pourra raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, puis éventuellement par l'absurde pour prouver l'hérédité.