Devoir surveillé

Exercice 1. *Nature de suites.*

Étudier la nature des suites suivantes (convergentes ou divergentes), et déterminer leur limite éventuelle :

1.

$$u_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{\sqrt{n}}$$

2.

$$u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$$

3.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$$

4.

$$u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$$

Exercice 2. *Suite presque harmonique*

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. On pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

$$\text{i.e. } v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Démontrer que

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$

En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. *Points fixes des fonctions continues*

1. Montrer que toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui est continue admet un point fixe, c'est à dire que :

$$\exists c \in [0, 1], f(c) = c.$$

2. Montrer que toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue et décroissante admet un point fixe, c'est à dire que :

$$\exists ! c \in \mathbb{R}, g(c) = c.$$

3. Si une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et que $h \circ h$ admet un point fixe, montrer que h aussi admet un point fixe.

Exercice 4. Suite récurrente

On note $f(x) = \sqrt{2+x}$ pour tout $x \in I = [-2, +\infty[$.

1. Prouver la stabilité de I par la fonction f .

On considère dorénavant la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $s_0 \in I$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $s_{n+1} = f(s_n)$.

2. Représenter la courbe de f et analyser les différents cas à distinguer selon $s_0 \in I$ pour étudier les variations et la convergence de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sans preuve mais en faisant apparaître chaque cas par la représentation des premiers termes d'une suite à l'aide du graphe).
3. Si $s_0 > 2$, décrire complètement le comportement de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prouvant toutes les assertions.
4. Dans tous les cas, prouver que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |s_{n+1} - 2| \leq \frac{|s_n - 2|}{2}$$

5. Démontrer alors que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |s_n - 2| \leq \frac{|s_0 - 2|}{2^n}$$

6. Que peut-on en déduire quant à la nature de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 5. Corde et tangente

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$. L'objectif de l'exercice est de démontrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

1. Soit $c \in]0, 1[$ et soit M le point de coordonnées $(c, f(c))$. Rappeler une équation de la tangente à la courbe représentative de f en M ainsi qu'une équation de la corde reliant $(0, f(0))$ à M .

Donner une interprétation géométrique du résultat que l'on veut démontrer.

2. On définit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et par $g(0) = 0$. Vérifier que g est continue sur $[0, 1]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$.
3. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0, 1[$.
4. Démontrer le résultat dans le cas $f(1) = 0$.
5. Dans cette question, on suppose que $f(1) > 0$.
 - (a) Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.
 - (b) En déduire que g' s'annule sur $]0, 1[$ et conclure.
6. Comment procéder si $f(1) < 0$?