Limites et fonctions continues

1 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1.
Soit :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{4} + 1 \end{array}.$$

1. Tracer le graphe de f et étudier le signe de $F(x) = f(x) - x$.
2. On définit $(u_n)_{n \geq 0}$ par :
$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
Etudier le sens de variation de (u_n).
3. Si $u_0 \in [0, 2]$, montrer que (u_n) converge ; calculer sa limite.
4. Etudier (u_n) si $u_0 > 2$, si $u_0 < 0$.

Exercice 2.
On définit $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

1. Justifier cette définition.
2. Etudier le signe de $\ln(1 + x) - x$ si $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 3.
Soient

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{3}\left(4 - x^2\right) \end{array}$$

et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Tracer le graphe de f et étudier le signe de $f(x) - x$.
2. Si $u_0 < -4$, étudier le sens de variation de (u_n) et montrer que $u_n \to -\infty$.
3. Que dire si $u_0 > 4$?
4. On suppose $u_0 \in [0, 2]$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$. Etudier (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ; en déduire que $u_n \to 1$.
5. On suppose $u_0 \in]-4, 0]$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > 0$, et déduire du cas précédent que $u_n \to 1$.
6. Etudier les cas $u_0 \in [2, 4[$, $u_0 = -4$ et $u_0 = 4$. Résumer les résultats obtenus.

Exercice 4.
Etudier les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

$$v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \cos(v_n).$$

2 Limites et continuité ponctuelle

Exercice 5. *Prolongement par continuité*

Les fonctions :

$$x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad \text{et} \quad x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

ont-elles des limites en 0 ? Peut-on les prolonger par continuité en 0 ?

Exercice 6. *Avec la partie entière*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor .$$

1. En quels points la fonction f est-elle continue ?
2. Donner les limites à droite et à gauche en un point de discontinuité.

Exercice 7. *Fonction périodique et limite en* $+\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est T-périodique et que $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 8. *Maximum d'une fonction continue sur un intervalle*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \max\{f(t),\ t \in [0,x]\} \end{array}$$

est continue.

Exercice 9. *Limites monotones pour des fonctions*

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est croissante et que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

3 Fonctions continues

Exercice 10. *Point fixe d'une fonction continue stabilisant un segment*

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application continue ; montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 11. *Point fixe d'une fonction continue décroissante sur* $\mathbb{R}$

Soit f décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 12. *Point fixe de* $f \circ f$ *et point fixe de* f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(x_0) = x_0$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 13. *Fonctions qui commutent pour la composition*

Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $g \circ f = f \circ g$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 14. *Application fine du théorème des valeurs intermédiaires*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant $f(0) = f(1)$. Si n est un entier ≥ 2, montrer qu'il existe $x_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 15. *Inégalités strictes et fonctions continues sur un segment*

1. Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :
$$\forall x \in [a,b], \qquad f(x) > g(x).$$
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b], \qquad f(x) \geq g(x) + \lambda.$$
Le résultat subsiste-t-il si on remplace $[a,b]$ par un intervalle non fermé ou non borné ?
2. On suppose maintenant :
$$\forall x \in [a,b], \qquad f(x) > g(x) \geq 0.$$
Montrer qu'il existe $\mu > 1$ tel que :
$$\forall x \in [a,b], \qquad f(x) \geq \mu g(x).$$

Exercice 16. *Caractérisation des fonctions constantes*

Trouver les fonctions f continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont l'image $f(I)$ ne contient qu'un nombre fini de points.

Exercice 17. *Injectivité et monotonie*

Soient I un intervalle (contenant au moins deux points) et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Montrer, si f est strictement monotone, que f est injective.
2. Trouver une fonction injective et non strictement monotone.
3. Montrer, si f est injective et continue, que f est strictement monotone.

Exercice 18. *Limites d'une fonction injective aux bords d'un intervalle*

Soit f une fonction définie et continue sur $I =]a,b[$ telle que :
$$\lim_{x \to a} f = \lim_{x \to b} f = l.$$
Montrer que f n'est pas injective.

Indication : on pourra raisonner par contraposée et se ramener aux résultats de l'exercice précédent.

Exercice 19. *Limites finies et fonctions bornées*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$
Montrer que f est bornée.

Exercice 20. *Limites infinies et minoration*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
Montrer que f admet un minimum.

4 Equations fonctionnelles

Exercice 21. *Caractérisations des fonctions constantes*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x+1).$$
Montrer que f est constante.
3. Déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et en 1 telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$.

Exercice 22. *Morphismes continus de $\mathbb{R}$ pour la loi +*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$
On pose $a = f(1)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que f est impaire.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que pour tous $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$. En particulier, $f(r) = ar$.
4. Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = at$. Conclure l'étude.
Indication : Montrer que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$.

Exercice 23.
Existe-t-il $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-f(x)) = x \quad ?$$

Exercice 24.
Déterminer les $f : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ f = f$.
Indications : on commencera par justifier que $f([0,1]) = [a,b]$ où $0 \le a \le b \le 1$.
Ensuite, on prouvera que $\forall x \in [a,b],\ f(x) = x$.
Enfin, on vérifiera qu'une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ telle qu'il existe a et b vérifiant $0 \le a \le b \le 1$, $\forall x \in [0,1],\ f(x) \in [a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ f(x) = x$ est bien une solution de notre problème.

Exercice 25.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 1$ et $a \neq 0$. On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) = ax + b.$$

1. Si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, existe-t-il des f solutions ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f \circ f \circ f(x)$ de deux façons et en déduire une relation entre $f(x)$ et $f(ax+b)$.
3. On suppose $a \in]0,1[$. Montrer que f' est constante. En déduire l'ensemble des solutions.
4. En déduire l'ensemble des solutions pour $a \in]1,+\infty[$.