
Dérivation

1 Exercices sur la dérivabilité

Exercice 1.

Calculer la dérivée, quand elle est définie, de :

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \left(\frac{x+1}{x-1} \ln(x^2 + 3) \right).$$

(On ne cherchera pas à simplifier l'écriture de cette dérivée...)

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 3.

On considère une fonction f dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On définit g par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1/2], & g(x) = f(2x), \\ \forall x \in]1/2, 1], & g(x) = f(2x - 1). \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.
2. A quelle condition g est-elle dérivable sur $[0, 1]$?

Exercice 4.

Si f est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer :

1. si f est paire, f' est impaire,
2. si f est impaire, f' est paire,
3. si f est T -périodique, f' est T -périodique.

Etudier les réciproques.

Exercice 5.

Calculer, à l'aide de la dérivation, les sommes suivantes, où $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n(x, y) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Exercice 6.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en x_0 , point intérieur à I .

Déterminer la limite de $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Exercice 7.

Soit f une fonction dérivable en x_0 . Déterminer la limite éventuelle, quand $x \rightarrow x_0$, de :

$$\frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}.$$

Exercice 8.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dérivable vérifiant $f \circ f = f$.

1. Soit $[m, M] = f([0, 1])$. Vérifier que $\forall x \in [m, M], f(x) = x$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que si f n'est pas constante, $M = 1$ et $m = 0$.
3. Conclure : trouver toutes les $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dérivables telles que $f \circ f = f$.

Exercice 9.

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = \frac{1}{2}x + 3.$$

Indication : on pourra calculer de deux façons différentes $f \circ f \circ f(x)$.

2 Théorème de Rolle et accroissements finis**Exercice 10.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ admet au plus trois solutions.

Exercice 11.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application 2 fois dérivable vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a, b[$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\alpha)$

(Utiliser l'application $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - A \frac{(x-a)(x-b)}{2}$, A étant choisi de sorte que $g(c) = 0$).

Exercice 12.

Soit f une fonction dérivable du segment $[a, b]$ (avec $a < b$) dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- $\forall x \in [a, b], f'(x) \leq M$,
- $f(b) - f(a) = M(b - a)$.

Montrer que f est affine (on pourra étudier $g(x) = f(x) - M(x - a)$).

Exercice 13. Théorème de Darboux

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, i.e pour tout intervalle $I \subset [a, b]$, $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable à dérivée bornée. On suppose que $f(n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 15.

Etudier les variations des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^x$$

Exercice 16.

Soient $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1], \mathbb{R})$ et :

$$g : x \in [-1, 1] \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 17. Généralisation du théorème de Rolle

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $f(x) \rightarrow f(a)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

(On pourra utiliser $g : [\arctan(a), \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(\tan(t))$, mais ce n'est pas indispensable).

3 Dérivées n -ièmes**Exercice 18. Zéros de la dérivée n -ième**

Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $n \geq 1$. On suppose que f s'annule en au moins p points distincts de $\mathbb{R}$ avec $p \geq n + 1$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins $p - n$ points distincts de $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Leibniz

Calculer les dérivées n -ième de $f : x \mapsto x^2 \sin x$ et $g : x \mapsto e^x \cos x$.

Exercice 20. Dérivées n -ièmes par récurrence

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} \ln x) = \frac{(n-1)!}{x} \quad \text{et} \quad \frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} e^{1/x}) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

Exercice 21. Application $\mathcal{C}^\infty$ avec toutes ses dérivées nulles

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

1. Prouver l'existence d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, +\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $g(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ et $g(x) = 1$ si $|x| \leq 1$.

Exercice 22.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - xf'(0)| \leq Mx^2.$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Etudier (v_n) et (w_n) .

Exercice 23. Inégalité de Landau

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.$$

1. Montrer, si $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, que :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{t} M_0 + \frac{t}{2} M_2.$$

2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. On pose :

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|.$$

Montrer que : $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

4 Points fixes attractifs de suites récurrentes**Exercice 24.**

Soit f une fonction définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = \sqrt{4+x}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0, 4]$ est stable par f , et que f admet un unique point fixe α sur $[0, 4]$ que l'on calculera.
2. La suite (u_n) est définie par

$$u_0 \in [0, 4] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

Qu'en déduit-on sur le comportement de (u_n) ?

Exercice 25. Valeur approchée de $\ln 2$

Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = (x-2)e^{2x} + (x+2)e^x, \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Démontrer que $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $f'(0)$?
3. Vérifier que $f''(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^3}$. En déduire que $|f'(x)| \leq 1/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2.$$

Exercice 26.

On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{x}$.

1. Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*)$, et montrer que I est stable par f .
2. Étudier la suite (u_n) .