MINISTÈRES ÉDUCATION JEUNESSE ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR RECHERCHE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques

ACADÉMIE DE PARIS
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Paris
Mercredi 20 mars 2024
Exercices académiques
Par équipes

La partie académique se déroule en deux heures.
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Chaque équipe traite les deux exercices et rend une copie commune.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Il est conseillé aux équipes qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'elles ont pu prendre.

Lorsque les candidats repèrent ce qui leur semble être une erreur d'énoncé, ils l'indiquent sur leur copie en expliquant les initiatives qu'ils ont été amenés à prendre et poursuivent leur composition.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Exercice académique 1

Partie 1 : Un exemple

18 personnes font la queue devant 18 tiroirs fermés, numérotés de 1 à 18.
La 1re personne ouvre tous les tiroirs.
La 2e ferme tous les tiroirs dont le numéro est un multiple de 2.
La 3e ne manipule que les tiroirs dont le numéro est un multiple de 3. Si le tiroir est ouvert, elle le ferme et l'ouvre s'il est fermé.
La ke personne ne manipule que les tiroirs dont le numéro est un multiple de k en ouvrant ceux qui sont fermés et en fermant ceux qui sont ouverts.
Et ainsi de suite jusqu'à la dernière personne présente.
On convient d'associer la valeur 0 à un tiroir fermé et la valeur 1 à un tiroir ouvert.

1. En représentant les 18 étapes successives sous forme d'un tableau rempli de 0 et de 1, indiquer les numéros des tiroirs ouverts au bout de ce processus.
2. Que constate-t-on ?

Partie 2 : Généralisation à n tiroirs et n personnes (n>1)

On dispose maintenant de n tiroirs fermés numérotés de 1 à n et de n personnes.
On applique le même processus que celui décrit dans la partie 1.

1. Combien de fois sera manipulé un tiroir dont le numéro est un nombre premier ? Quel sera son état à la fin du processus ?

On rappelle que tout nombre entier $N > 1$ se décompose de façon unique (à l'ordre des facteurs près) en un produit de nombres premiers.
Ainsi, il existe un nombre entier k tel que $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots . p_k^{\alpha_k}$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et k, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et p_i premier.

2. On considère un nombre premier p et α un entier naturel non nul.
a. Déterminer le nombre de diviseurs positifs du nombre p^α.
b. Combien de fois sera manipulé le tiroir dont le numéro est p^α ?
c. Quel sera l'état de ce tiroir au bout du processus ?
3.
a. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de $3^2 \times 7^3$.
b. Combien de fois sera manipulé un tiroir dont le numéro est $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots . p_k^{\alpha_k}$?
c. Quel sera l'état du tiroir numéroté 2024 au bout du processus ? Justifier.
4.
a. Montrer qu'un entier naturel N admet un nombre impair de diviseurs positifs si et seulement si N est un carré parfait.
b. En déduire les numéros des tiroirs ouverts à la fin du processus.

Exercice académique 2

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle factorielle n et on note $n!$ le produit des entiers de 1 à n :

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1\,.$$

Par exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Les deux parties de cet exercice ne sont pas indépendantes.

Partie 1 : Savoir compter

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel compris entre 1 et n. On dispose d'un ensemble E constitué de n jetons numérotés de 1 à n. On met ces n jetons dans une urne et on choisit, l'un après l'autre et sans remise, k jetons de cette urne : on obtient ainsi ce que l'on appelle une k-liste de E sans répétition.

1. Cas $n = 10$.

On dispose ici d'un ensemble *E* constitué de dix jetons numérotés de 1 à 10 :

$$E = \{①,②,③,④,⑤,⑥,⑦,⑧,⑨,⑩\}$$

Par exemple, les jetons ③,⑦,② obtenus dans cet ordre forment une 3-liste de E sans répétition.

a. Combien de 3-listes de E sans répétition peut-on faire uniquement avec les jetons ③,⑦ et ② ? Écrire le résultat à l'aide d'une factorielle.

b. Justifier que le nombre total de 3-listes de E sans répétition est égal à 720.

c. Déterminer la plus petite valeur de k telle que le nombre de k-listes de E sans répétition soit supérieur à 10 000.

2. On appelle *k*-arrangement de *E* le nombre, que l'on note A_n^k, de *k*-listes de E sans répétition. On a donc, dans le cas où $n = 10$ et $k = 3$, $A_{10}^3 = 720$.

a. Montrer que $A_9^4 = 3024$.

b. Calculer de même A_4^4 et A_5^3.

3. Le nombre de combinaisons de k jetons de E, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de façons de choisir simultanément k jetons dans l'urne. Dans ce cas, l'ordre n'est donc pas pris en compte.

a. Expliquer pourquoi $\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}$.

b. Calculer $\binom{5}{3}$.

4. Dans la suite de l'exercice, on se contentera d'exprimer les nombres de combinaisons à l'aide de la notation $\binom{n}{k}$.

On considère ci-dessous le script d'une fonction en langage Python qui prend comme arguments les entiers naturels k et n.

```
def olymp(n,k) :
       p=1
       for i in range(k):
            p=p*(n-i)
       return p
```

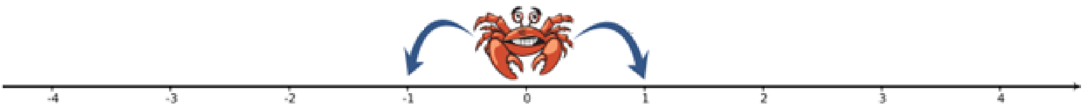
a. Que renvoie *olymp(10,3)* ?

b. Que renvoie cette fonction dans le cas général, lorsque $1 \leq k \leq n$?

c. Quelles instructions utilisant la fonction *olymp* permettraient de calculer $\binom{n}{k}$?

Partie 2 : Marche aléatoire du crabe

Un crabe se déplace sur une planche graduée et infinie. Le crabe est initialement placé sur l'origine et, à chaque étape, il se déplace au hasard d'une unité vers la gauche ou d'une unité vers la droite avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.



1. Construire un arbre illustrant les deux premières étapes, puis déterminer la probabilité que le crabe se trouve sur l'origine après deux étapes.

2. Dans toute la suite, n désignera un entier naturel non nul.
On note X_n l'abscisse du crabe après n étapes et D_n le nombre de fois où le crabe a fait un déplacement vers la droite au cours de ces n étapes. Exprimer X_n en fonction de D_n et n.

3. On note O_n l'événement « Le crabe se trouve sur l'origine après n étapes ».

a. Combien existe-t-il de parcours où le crabe se trouve sur l'origine après quatre étapes ? Après cinq étapes ?

b. En déduire les probabilités $P(O_4)$ et $P(O_5)$.

c. Déterminer la probabilité $P(O_{2n+1})$.

d. En utilisant la partie 1, exprimer la probabilité $P(O_{2n})$ en fonction de n.

4. Écrire le script en langage Python d'une fonction *marche_aleatoire* qui prend comme argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la liste des abscisses successives du crabe après n étapes.
Vous pourrez utiliser la fonction *random.choice([-1,1])* qui permet de choisir aléatoirement le nombre 1 ou le nombre -1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

5. Soit n un entier naturel non nul.

a. Combien existe-t-il de parcours où le crabe se trouve au point d'abscisse n après n étapes ?

b. Soit k un entier naturel compris entre 0 et $n-1$.
Combien existe-t-il de parcours où le crabe se trouve au point d'abscisse k après n étapes ?