

Exercices sur les systèmes linéaires et matrices.

1 Système linéaire

Exercice 1. Systèmes simples

1.

$$\begin{cases} x & +2y & & =0 \\ -2x & +y & +z & =2 \\ -x & -y & +2z & =3 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x & +y & = 0 \\ 2x & +y & = 1 \\ x & +2y & = -1 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 5x & +3y & +2z & =0 \\ 10x & +6y & +2z & =0 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} x & -2y & +z & +t & = -2 \\ 2x & -y & -z & -t & = -1 \\ 3x & -3y & & & = -8 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & = 1 \\ -4x & +2y & +z & = 3 \\ -2x & +y & +4z & = 4 \\ 10x & -5y & -6z & = -10 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} x & +2z & +t & = 0 \\ & y & -z & -2t & = 1 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & +t & = -2 \\ 2x & +7y & +3z & & = -5 \\ 3x & +8y & +7z & +11t & = 13 \\ -2x & -8y & -2z & +6t & = 18 \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} x & -y & +z & +t & = 0 \\ 3x & -3y & +3z & +2t & = 0 \\ x & -y & +z & +11t & = 0 \\ 5x & -5y & +5z & +7t & = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Systèmes simples

1.

$$\begin{cases} x & & +3z & = 1 \\ 3x & -y & +2z & = 1 \\ 4x & & +2z & = 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x & +5y & +2z & = 0 \\ x & +2y & -z & = 0 \\ x & +4y & +7z & = 0 \\ x & +3y & +3z & = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x & +y & -3z & = -1 \\ 2x & +y & -2z & = 1 \\ x & +y & +z & = 3 \\ x & +2y & -3z & = 1 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & = 0 \\ 2x & +5y & +2z & = 0 \\ 3x & -y & -4z & = 0 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x & -3y & +4z & -2t & = 5 \\ & 2y & +5z & +t & = 2 \\ & y & -3z & & = 4 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} x & +y & -z & = -1 \\ 3x & +3y & & = 1 \\ x & +y & -2z & = 4 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x & +3y & -2z & +4t & = 1 \\ & & z & & = 1 \end{cases}$$

Exercice 3. Systèmes à paramètres

1.

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = a \\ 2x + my + 2z = b \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = c \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + t = a \\ x + t = b \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} ax + bz = 0 \\ bx + ay = 0 \\ by + az = 0 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b-1 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} ax + bt = 0 \\ bx + ay = 0 \\ by + az = 0 \\ bz + at = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Système apparemment non linéaire

Résoudre le système suivant, où x , y et z sont des réels positifs :

$$\begin{cases} x^3 y^2 z^6 = 1 \\ x^4 y^5 z^{12} = 2 \\ x^2 y^2 z^5 = 3. \end{cases}$$

Indication : une fonction qui transforme les produits en sommes linéarise le système.

2 Matrices

Exercice 5. Equation matricielle

On cherche à déterminer les matrices X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$(*) \quad X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'une telle matrice X commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire des relations entre les coefficients de X .
2. Déterminer les X solutions.

Exercice 6. Puissances d'une matrice par conjecture

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 , A^3 et A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Puissances d'une matrice et binôme de Newton

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Calculer $(A+B)^2$ ainsi que $A^2 + 2AB + B^2$. Que remarquez-vous ?

2. Si $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifier que $CD = DC$ et calculer en fonction de $p \in \mathbb{N}^*$: C^p et D^p .
3. On note $E = C + D$, calculer E^p en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. *Transposition de matrices*

1. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^T A$, montrer que A est inversible et donner son inverse.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme $m_{i,j}$ à la ligne i et colonne j .

Si $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, calculer le terme de $M^T M$ à la ligne i et colonne j ainsi que celui ligne j colonne i . Que remarquez vous ?

Exercice 9. *Inverse d'une matrice par la méthode naïve*

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le système que doivent vérifier a, b, c et d .
- Montrer que le système précédent admet une unique solution que l'on précisera.
- Vérifier que la matrice B ainsi obtenue vérifie également $BA = I_2$.

Exercice 10. *Inversibilité par résolution de système*

1. On considère le système suivant d'inconnues x, y et z dans \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases}$$

Résoudre ce système en fonction des paramètres a, b et c réels.

2. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. *Inversion pratique*

Déterminer les inverses éventuels de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. *Inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$.

Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction de a, b, c et d .

Exercice 13. Calcul des puissances positives et négatives d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .
3. Calculer A^{-p} pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. *Produit nul*

Soient A, B, C trois matrices carrées non nulles telles que $ABC = 0$. Montrer que deux au moins de ces trois matrices ne sont pas inversibles.

Exercice 15. *Commutant*

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 16. *Produits égaux*

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, AC . La matrice A peut-elle être inversible ?
2. Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle)

Exercice 17. *Inverse à l'aide d'un polynôme annulateur*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$, que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. Prouver que A est inversible et déterminer A^{-1} .
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$, montrer l'inversibilité de A et calculer A^{-1} .

Exercice 18. Calcul des puissances d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$ et :

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.
Indication. On écrira A comme combinaison linéaire de la matrice identité et d'une matrice J ne contenant que des 1.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible. Exprimer alors son inverse.