Exercices d'arithmétique et Polynômes

1 Exercices basiques

Exercice 1. *Calcul de la somme des carrés des entiers*

Trouver un polynôme P de degré 3 tel que $P(X) - P(X-1) = X^2$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Exercice 2. *En pratique !*

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 3. *Reste de la division euclidienne*

Déterminer le reste de la division euclidienne de

1. X^n par $X^2 - 3X + 2$, puis par $(X-1)^2$.
2. $(X\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^n$ par $X^2 + 1$.

2 Equations fonctionelles et polynômes

Exercice 4. *Polynôme « périodique »*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(X+a) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant.

Exercice 5. *Solutions polynômiales d'une équation fonctionelle*

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$. Montrer que $P = Q = 0$.

Exercice 6. *Solution polynômiale d'une équation fonctionelle*

Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1$.
Indication : considérer la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) = u_n$.

Exercice 7.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$. Calculer $P_n(k)$ pour $k \in \{1, ..., n\}$.
En déduire une factorisation de $P_n(X)$.

Exercice 8. *Deux dernières équations*

Trouver les éléments non nuls $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

1. $P(X^2) = P(X)^2$
2. $P(X^2) = P(X)P(X+1)$

(On pourra déterminer leurs racines complexes éventuelles).

3 Formule de Taylor, caractérisation de la multiplicité, factorisation par les racines.

Exercice 9. *Application directe de la formule de Taylor pour les polynômes*

Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(3) = 7, \quad P'(3) = -1, \quad P''(3) = 4 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 3, \quad P^{(n)}(3) = 0.$$

Indication : prouver d'abord que P est de degré 2.

Exercice 10. *Polynôme absolument monotone sur un intervalle*

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(a) \geq 0$.
Montrer que P ne possède pas de racine dans $]a, +\infty[$.

Exercice 11. *Exercice similaire à celui du cours.*

Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 vérifiant les deux conditions suivantes :
- $(X+2)^3$ divise $P(X) + 10$
- $(X-2)^3$ divise $P(X) - 10$.

Exercice 12. *Avec le théorème de Rolle*

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.
1. Démontrer que toutes les racines de P' sont réelles.
2. En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.
3. Reprendre les questions si l'on suppose simplement que toutes les racines de P sont réelles.

Exercice 13. *Divisibilité et multiplicité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $(X-1)^2$ divise $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 14. *Divisibilité avec la décomposition en facteurs irréductibles*

Soit $P_n(X) = X^{2n} + X^n + 1$. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $P_1 | P_n$?
NB : les deux polynômes P_1 et P_n sont dans $\mathbb{R}[X]$, mais vérifier que $P_1 | P_n$ ne dépend pas du corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dans lequel on travaille. En effet, l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne nous garantissent que ceux-ci sont identiques si l'on effectue la division de P_n par P_1 dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si $P_1 | P_n$ dans $\mathbb{C}[X]$, c'est aussi vrai dans $\mathbb{R}[X]$ puisque ceci signifie que le reste de la division euclidienne est nul.
Indications : Déterminer les racines de P_1, puis discuter selon le reste de la division euclidienne de n par 3.

Exercice 15. *Analyse-synthèse*

Préciser l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont multiples de leur polynôme dérivé.
Indication : on pourra par exemple montrer qu'un tel polynôme correspond à une fonction vérifiant une équation différentielle que l'on sait résoudre, puis déterminer alors les polynômes pouvant convenir.

Exercice 16. *Application de la décomposition dans $\mathbb{C}$ pour obtenir celle dans $\mathbb{R}$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^{2k}$ sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17. *Racines n-ièmes de l'unité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
Décomposer sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^{2n} - 2X^n \cos(\theta) + 1$.
Indication : Poser $y = x^n$ et déterminer sous forme polaire l'ensemble des racines de P.

Exercice 18. *Divisibilité et composition*

Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non-constant. On suppose que $A \circ P | B \circ P$. En déduire que $A | B$.
Indication : Écrire à priori la division euclidienne de A par B, puis composer par P.