Corrigé du devoir surveillé

1 Cours

1. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur au domaine de définition.
2. Lemme de Rolle
3. Théorème des accroissements finis.
4. Fonctions lipchitziennes : définition
5. Caractérisation par la dérivée des fonctions lipchitziennes dans le cas de fonctions dérivables sur un intervalle.
6. Théorème de la limite de la dérivée.
7. Dérivée n-ième d'un produit : formule de Leibniz.
8. Opérations élémentaires et matrices : matrices de transvection, de transposition et de dilatation, interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen de ces matrices.

2 Sujet normal : Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. (a) f est C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{2x}+1$ le sont, et que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{2x}+1 \geq 1$. Calculons :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^2x+1) - 2e^{2x}e^x}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$$

Ainsi $f'(x) > 0$ si et seulement si $e^{2x} < 1$, c'est à dire pour $x < 0$. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, f admet en 0 son maximum qui est $\frac{1}{2}$.

(b) Comme on a pour tout x, $f(x) > 0$, l'équation $f(x) = x$ ne peut admettre que des solutions $x > 0$.
Ainsi, on étudie la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F : x \mapsto f(x) - x$.
F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, continue. On peut remarquer que $F(0) = \dfrac{1}{2}$, $F(1) < \frac{1}{2} - 1$ donc $F(1) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe $\ell \in [0,1]$ tel que $F(\ell) = 0$ donc $f(\ell) = l$. Ce nombre est unique par stricte décroissance de F.

(c) On remarque que pour tout x, $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, $f(\ell) \in [0, \frac{1}{2}]$ donc $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$ puisque $f(\ell) = \ell$.

(d) On sait que pour tout réel x positif : $|f'(x)| = -f'(x)$.

$$|f'(x)| = \frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2x}+1)}$$

Or $e^{2x}-1 < e^{2x}+1$ et $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} < 1$ donc : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$, i.e. $|f'(x)| \leqslant f(x)$.

On a déjà remarqué lors de l'étude des variations de f que pour tout x réel, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que que $\forall x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(e) $f\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ est d'autant plus vrai que $f(\mathbb{R}) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ se démontre aisément par récurrence puisque $u_0 = 0$ et que l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par f.

L'initialisation est immédiate ($u_0 = 0$), et l'hérédité est évidente :

$u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ entraîne $f(u_n) \in [0, \frac{1}{2}]$ d'où $u_{n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$.

(b) Comme u_n et ℓ sont deux éléments de l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ où l'on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$, soit $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$.

On en déduit par récurrence que pour tout n entier : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

(c) La suite (u_n) converge donc vers ℓ puisque $|u_n - \ell| \to 0$ par encadrement.

3 Sujet bis : Équations fonctionnelles

Les deux parties de cet exercice sont liées, on pourra admettre les résultats de la première partie pour traiter la deuxième.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$(R) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On pose $a = f(1)$.

(a) Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que f est impaire.

Pour $x = y = 0$, on a $f(0+0) = f(0)+f(0)$, c'est à dire $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a pour $y = -x$: $f(x-x) = f(x)+f(-x)$, c'est à dire $0 = f(x)+f(-x)$ donc f est impaire.

(b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.

Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la propriété est clairement vraie. Prouvons la par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.

Supposons donc qu'elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, on a alors d'après (R) pour $y = nx$: $f(x+nx) = f(x)+f(nx) = f(x)+nf(x)$. Ceci signifie $f((n+1)x) = (n+1)f(x)$. La propriété est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

Enfin, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on a $-n \in \mathbb{N}$ donc $f((-n)x) = (-n)f(x)$, c'est à dire $-f(nx) = -nf(x)$ par imparité de f, d'où $f(nx) = nf(x)$.

(c) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{Q}$, alors on a $f(rx) = ar$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. On a alors, si $x \in \mathbb{R}$, d'après les questions précédentes : $f(qr) = qf(r)$ et $f(qr) = f(q\frac{p}{q}) = f(p) = ap$. De ces deux égalités, on déduit $qf(r) = apf$, c'est à dire $f(rx) = a\frac{p}{q}f(x) = ar$.

(d) Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = at$. Conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (R).

Si $t \in \mathbb{R}$, on sait que les approximations décimales de t, définies pour $n \in \mathbb{N}$ par : $d_n = \frac{\lfloor 10^n t \rfloor}{10^n}$, forment une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui converge vers t. Puisque $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$, on a $f(d_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$ par continuité de f, c'est à dire $ad_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$ puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n \in \mathbb{Q}$. Or $ad_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} at$, d'où $f(t) = at$.

On vient de voir que si f est une fonction continue vérifiant (R), alors on a un réel a tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at.$$

Réciproquement, toute fonction de la forme $f(t) = at$ où $a \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie (R). Les fonctions vérifiant (R) qui sont continues sont ainsi les fonctions linéaires.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to]-1,1[$ une application continue telle que :

$$(S)\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

(a) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1,1[$, et que ϕ vérifie (S).

ϕ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\phi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$\phi'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

Ainsi, ϕ est strictement croissante, ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont -1 et 1, donc ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1,1[$.

Calculons alors :

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{\dfrac{e^x-1}{e^x+1} + \dfrac{e^y-1}{e^y+1}}{1 + \dfrac{e^x-1}{e^x+1}\dfrac{e^y-1}{e^y+1}}.$$

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{(e^x-1)(e^y+1)+(e^y-1)(e^x+1)}{(e^x+1)(e^y+1)+(e^x-1)(e^y-1)}.$$

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{2e^xe^y-2}{e^{x+y}+e^x+e^y+1+e^{x+y}-e^x-e^y+1}.$$

$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{2e^{x+y}-2}{2e^{x+y}+2}.$$
$$\frac{\phi(x)+\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \phi(x+y).$$

(b) En déduire une expression simple, si $(X,Y) \in]-1,1[^2$, de $\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right)$ en fonction de $\phi^{-1}(X)$ et $\phi^{-1}(Y)$.
Pour $x = \phi^{-1}(X)$ et $y = \phi^{-1}(Y)$, on a d'après la question précédente :
$$\phi(\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)) = \frac{\phi(\phi^{-1}(X))+\phi(\phi^{-1}(Y))}{1+\phi(\phi^{-1}(X))\phi(\phi^{-1}(Y))}$$
$$\phi(\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)) = \frac{X+Y}{1+XY}$$
On en déduit que $\phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y)$ est l'unique antécédent dans $\mathbb{R}$ de $\frac{X+Y}{1+XY}$, donc :
$$\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right) = \phi^{-1}(X)+\phi^{-1}(Y).$$

(c) On note $h = \phi^{-1} \circ g$, montrer que h vérifie la propriété (R) de la première partie de l'exercice.
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculons :
$$h(x+y) = \phi^{-1}(g(x+y))$$
$$h(x+y) = \phi^{-1}(\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)})$$
On peut appliquer la question précédente avec $X = g(x)$ et $Y = g(y)$ donc :
$$h(x+y) = \phi^{-1}(g(x)) + \phi^{-1}(g(y))$$
$$h(x+y) = h(x)+h(y)$$

(d) Déterminer alors une expression simple de g, et conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (S).
Comme h est continue puisque g et ϕ^{-1} le sont, on a donc d'après la première partie un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = ax$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \phi^{-1}(g(x)) = ax$ donc $g(x) = \phi(ax)$.
Réciproquement, si g est de cette forme, on a alors si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$g(x+y) = \phi(a(x+y)) = \phi(ax+ay) = \frac{\phi(ax)+\phi(ay)}{1+\phi(ax)\phi(ay)} = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$
Les fonctions continues qui vérifient (R) sont donc exactement les fonctions de la forme :
$$g(x) = \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$$
où $a \in \mathbb{R}$.