Corrigé du devoir surveillé

1 Tous les sujets

Exercice 1. *Carrés magiques d'ordre* 3.

Un carré est magique lorsque la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est identique. Cette somme est appelée **densité** du carré magique. L'ordre du carré correspond au nombre d'éléments d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. Un carré d'ordre 3 contient huit rangées de trois éléments (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales). Le **médian** est l'élément du centre. Voici quelques exemples de tels carrés :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

10	2	9
6	7	8
5	12	4

23	2	17
8	14	20
11	26	5

1. On considère les carrés de nombres suivant où x, y et z sont des nombres réels :

a)

2z	x+1	3y+7
5x-1	4y+1	z+7
3y+1	2z+3	2x+2

b)

x+1	y	z
2x	2y	2z
3x	3y	3z

Déterminer, pour chacun de ces deux carrés, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que le carré soit magique.

(a) Analyse : Soit (x, y, z) une solution. L'égalité des sommes des nombres de la première et la troisième ligne donne :

$$2z + x + 3y + 8 = 3y + 2z + 2x + 6.$$

On en déduit que $x = 2$, puis on écrit l'égalité des sommes des nombres de la première et la troisième colonne donne :

$$2z + 3y + 10 = 3y + z + 20.$$

On en déduit $z = 10$. Enfin, avec par exemple l'égalité des sommes des deux premières lignes, on obtient $y = 3$.

Synthèse : $(x, y, z) = (2, 3, 10)$ donne bien le carré magique

20	3	16
9	13	17
10	23	6

de densité 39.

(b) Analyse : Soit (x, y, z) une solution. L'égalité des sommes des deux dernières lignes donne $x + y + z = 0$ tandis que les deux premières donnent $x + y + z = -1$. Le problème n'a donc aucune solution et il n'existe pas de carré magique de cette forme.

2. On souhaite maintenant décrire l'ensemble de tous les carrés magiques d'ordre 3, on considère donc le carré suivant où a, b, c, d, e, f, g et h et i sont des inconnues réelles :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

.

(a) Écrire un système d'équations vérifiées par les inconnues si et seulement si le carré est magique. On écrit un système avec 7 équations : en effet, l'égalité de 8 nombres différents équivaut à 7 égalités puisque cela revient à dire que chacun des 7 premiers nombres est égal au dernier.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & g+e+c \\ d+e+f & = & g+e+c \\ g+h+i & = & g+e+c \\ a+d+g & = & g+e+c \\ b+e+h & = & g+e+c \\ c+f+i & = & g+e+c \\ a+e+i & = & g+e+c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a+b-e-g & = & 0 \\ -c+d+f-g & = & 0 \\ -c-e+h+i & = & 0 \\ a-c+d-e & = & 0 \\ b-c-g+h & = & 0 \\ -e+f-g+i & = & 0 \\ a-c-g+i & = & 0 \end{array}\right.$$

(b) Ecrire la matrice du système précédent, puis sa forme échelonnée réduite : on se contente de la matrice non augmentée, la dernière colonne de la matrice augmentée n'étant constituée que de 0 pour ce système qui est homogène.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On soustrait la ligne 1 aux lignes 4 et 7 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On procède à l'échange $L_2 \leftrightarrow L_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On soustrait L_2 à L_1, et on l'ajoute à L_4 et L_7 :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

On ajoute L_3 à L_1, on la soustrait à L_2 et L_5 et on la soustrait deux fois à L_4 et L_7 :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

On soustrait L_4 à L_5 :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

On ajoute L_5 une fois à L_2, 2 fois à L_4 et 3 fois à L_7, on la soustrait 2 fois à L_1 et une fois à L_3 et L_6 :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

On échange les deux dernières lignes et on multiplie l'avant dernière par $\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Et on finit la réduction :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(c) Préciser le rang du système, le nombre d'inconnues paramètres puis l'ensemble de ses solutions.

Le système est de rang 6, il y a 3 inconnues paramètres g, h et i. L'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \frac{2}{3}g+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}i & \frac{2}{3}g-\frac{1}{3}h+\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}g+\frac{2}{3}h+\frac{2}{3}i\\ \hline -\frac{2}{3}g+\frac{1}{3}h+\frac{4}{3}i & \frac{1}{3}g+\frac{1}{3}h+\frac{1}{3}i & \frac{4}{3}g+\frac{1}{3}h-\frac{2}{3}i\\ \hline g & h & i\\ \hline \end{array} \,\middle|\, (g,h,i)\in\mathbb{R}^3 \right\}$$

(d) Prouver enfin que dans un carré magique d'ordre 3, la densité est le triple du médian.

Il suffit d'observer le carré précédent, puisque tout carré magique d'ordre 3 est de cette forme. Son médian vaut $\frac{1}{3}(g+h+i)$ et sa densité est $g+h+i$.

2 Sujet normal

Exercice 2. *Puissances d'une matrice.*

Soit $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. On note $B = A - I_3$, calculer B^2 et B^3.
   $B = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
2. Exprimons, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:
   $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
3. Par exemple à l'aide de la formule du binôme (justifier son utilisation), donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.
   On a $A = I_3 + B$ avec B et I_3 qui commutent puisque $I_3B = BI_3 = B$ donc :
   $$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}.$$
   Comme pour $k \geq 3$, on a $B^k = 0$, on obtient :
   $$A^n = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$
   $$A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2;$$
   $$A^n = \begin{pmatrix}1 & -n & 2n - \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3 Sujet bis

Exercice 3. *Suites récurrentes et matrices.*

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On se donne trois réels (a, b, c) avec $b \neq 0$ et on note :

$$F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}, \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}, MF = FM\}.$$

1. (a) Montrer que

$$\mathcal{F} = \{\alpha F + \beta I, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

On commence par vérifier que :

$$\{\alpha F + \beta I, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{F}.$$

Soient α et β dans $\mathbb{R}$. On a alors :

$$(\alpha F + \beta I)F = \alpha F^2 + \beta F = F(\alpha F + \beta I).$$

On montre maintenant que :

$$\mathcal{F} \subset \{\alpha F + \beta I, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{F}$. On a alors puisque $FM = MF$:

$$\begin{pmatrix} ax - bz & ay - bt \\ bx + cz & by + ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by & -bx + cy \\ az + bt & -bz + ct \end{pmatrix}.$$

On déduit de l'égalité du premier coefficient $-bz = by$ d'où $z = -y$ puisque $b \neq 0$.
On déduit de l'égalité du deuxième coefficient : $ay - bt = -bx + cy$ donc $b(x - t) = (c - a)y$ donc $x = t + \frac{c-a}{b}y$.
Ainsi, $M = \begin{pmatrix} t + \frac{c-a}{b}y & y \\ -y & t \end{pmatrix} = -\frac{y}{b}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} + \left(t + \frac{c}{b}y\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a bien $M \in \{\alpha F + \beta I, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(b) Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{F}, \exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, M = \alpha F + \beta I.$$

L'existence a été prouvée à la question précédente. Pour l'unicité, on suppose que α, β, γ et δ vérifient : $\alpha F + \beta I = \gamma F + \delta I$ donc $\begin{pmatrix} \alpha a + \beta & -\alpha b \\ \alpha b & \alpha c + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a + \delta & -\gamma b \\ \gamma b & \gamma c + \delta \end{pmatrix}$.
Ainsi, on a grâce à l'égalité du troisième coefficient de ces matrices : $\alpha b = \gamma b$ d'où $\alpha = \gamma$ car $b \neq 0$, on en déduit enfin $\beta = \delta$ grâce au dernier coefficient. Il y a donc bien unicité.

(c) Établir que pour tout entier $n \geq 0$, F^n appartient à $\mathcal{F}$.
Il suffit de remarquer que $F^n F = F^{n+1} = FF^n$ donc $F^n \in \mathcal{F}$ d'après les questions précédentes.

2. Pour tout entier $n \geq 0$, on note α_n et β_n des réels tels que $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$.

(a) Justifier l'existence de (α_n, β_n). Puisque $F^n \in \mathcal{F}$ d'après la question précédente, l'existence de (α_n, β_n) est conséquence de la première question de cet exercice.

(b) Déterminer α_2 et β_2 en fonction de a, b, c.

On calcule : $F^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -(a+c)b \\ (a+c)b & -b^2 + c^2 \end{pmatrix} = (a+c)F - (ac + b^2)I.$

On en déduit $\alpha_2 = a + c$ et $\beta_2 = -(ac + b^2)$.

(c) Déterminer une relation de récurrence entre α_n, α_{n+1} et α_{n+2}.

En écrivant :

$$F^{n+1} = (\alpha_n F + \beta_n I)F,$$

$$F^{n+1} = \alpha_n F^2 + \beta_n F,$$

$$F^{n+1} = \alpha_n \left[(a+c)F - (ac + b^2)I\right] + \beta_n F,$$

$$F^{n+1} = \left[\alpha_n(a+c) + \beta_n\right] F - \alpha_n(ac + b^2)I.$$

On en déduit $\alpha_{n+1} = \alpha_n(a+c) + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = -\alpha_n(ac + b^2)$.

Ainsi, $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}(a+c) + \beta_{n+1}$ d'où :

$$\alpha_{n+2} = (a+c)\alpha_{n+1} - (ac + b^2)\alpha_n.$$

(d) Déterminons les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a = 3$ et $b = c = -2$.

On a dans ce cas d'après la question précédente :

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n.$$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique vaut :

$$P(r) = r^2 - r - 2$$

Ses racines étant 2 et -1, on a deux réels A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = A2^n + B(-1)^n$$

En regardant pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $A = \frac{1}{2}$ et $B = -\frac{1}{2}$. Ainsi, $\alpha_n = \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}(-1)^n$. De la relation $\alpha_{n+1} = \alpha_n(a+c) + \beta_n$ obtenue ci-avant, on peut déduire : $\beta_n = \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}(-1)^n$.