Devoir surveillé

1 Cours

1. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur au domaine de définition.
2. Lemme de Rolle
3. Théorème des accroissements finis.
4. Fonctions lipchitziennes : définition
5. Caractérisation par la dérivée des fonctions lipchitziennes dans le cas de fonctions dérivables sur un intervalle.
6. Théorème de la limite de la dérivée.
7. Dérivée n-ième d'un produit : formule de Leibniz.
8. Opérations élémentaires et matrices : matrices de transvection, de transposition et de dilatation, interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen de ces matrices.

2 Sujet normal : Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. (a) Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et étudier les variations de f.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ.
   (c) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$
   Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1.65 \pm 10^{-2}$ et $e \simeq 2.72 \pm 10^{-2}$.
   (d) Montrer que pour tout réel x positif : $0 \leqslant |f'(x)| \leqslant f(x)$ puis que $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   En déduire que $\forall x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (e) Vérifier que $f\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

3 Sujet bis : Équations fonctionnelles

Les deux parties de cet exercice sont liées, on pourra admettre les résultats de la première partie pour traiter la deuxième.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$(R)\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

   On pose $a = f(1)$.

   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   En déduire que f est impaire.

   (b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.

   (c) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(r) = ar$.

   (d) Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = at$.

   (e) Conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (R).

2. Soit $g : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ une application continue telle que :

$$(S)\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

   (a) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x réel par $\phi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
   Montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1, 1[$, et que ϕ vérifie (S).

   (b) En déduire une expression simple, si $(X, Y) \in]-1, 1[^2$, de $\phi^{-1}\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right)$ en fonction de $\phi^{-1}(X)$ et $\phi^{-1}(Y)$.

   (c) On note $h = \phi^{-1} \circ g$, montrer que h vérifie la propriété (R) de la première partie de l'exercice.

   (d) Déterminer alors une expression simple de g, et conclure l'étude de l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (S).