Devoir surveillé

1 Tous les sujets

Exercice 1. *Carrés magiques d'ordre* 3.

Un carré est magique lorsque la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est identique. Cette somme est appelée **densité** du carré magique. L'ordre du carré correspond au nombre d'éléments d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. Un carré d'ordre 3 contient huit rangées de trois éléments (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales). Le **médian** est l'élément du centre. Voici quelques exemples de tels carrés :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

10	2	9
6	7	8
5	12	4

23	2	17
8	14	20
11	26	5

1. On considère les carrés de nombres suivant où x, y et z sont des nombres réels :

a)

2z	x+1	3y+7
5x-1	4y+1	z+7
3y+1	2z+3	2x+2

b)

x+1	y	z
2x	2y	2z
3x	3y	3z

Déterminer, pour chacun de ces deux carrés, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que le carré soit magique.

2. On souhaite maintenant décrire l'ensemble de tous les carrés magiques d'ordre 3, on considère donc le carré suivant où a, b, c, d, e, f, g et h et i sont des inconnues réelles :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

.

(a) Écrire un système d'équations vérifiées par les inconnues si et seulement si le carré est magique.
(b) Ecrire la matrice du système précédent, puis sa forme échelonnée réduite.
(c) Préciser le rang du système, le nombre d'inconnues paramètres puis l'ensemble de ses solutions.
(d) Prouver enfin que dans un carré magique d'ordre 3, la densité est le triple du médian.

2 Sujet normal

Exercice 2. *Puissances d'une matrice.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note $B = A - I_3$, calculer B^2 et B^3.
2. Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$.
3. Par exemple à l'aide de la formule du binôme (justifier son utilisation), donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

3 Sujet bis

Exercice 3. *Suites récurrentes et matrices.*

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On se donne trois réels (a, b, c) avec $b \neq 0$ et on note :

$$F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}, MF = FM\}.$$

1. (a) Montrer que

$$\mathcal{F} = \{\alpha F + \beta I, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

   (b) Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{F}, \exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, M = \alpha F + \beta I.$$

   (c) Établir que pour tout entier $n \geq 0$, F^n appartient à $\mathcal{F}$.

2. Pour tout entier $n \geq 0$, on note α_n et β_n des réels tels que $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$.

   (a) Justifier l'existence de (α_n, β_n).

   (b) Déterminer α_2 et β_2 en fonction de a, b, c.

   (c) Déterminer une relation de récurrence entre α_n, α_{n+1} et α_{n+2}.

   (d) Déterminer les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a = 3$ et $b = c = -2$.