

Devoir à la maison

Polynômes de Tchebycheff

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geq 1, T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. Déterminer les polynômes T_2 , T_3 et T_4 .
2. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Établir par récurrence la relation suivante pour tout nombre réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

- (b) En déduire que $|T_n(u)| \leq 1$ pour $u \in [-1; 1]$.
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$.
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une décomposition de T_n en produit d'un réel et de polynômes unitaires de degré 1.
5. Montrer par une méthode de votre choix que T'_n est lui aussi scindé à racines simples si $n \geq 2$.
6. Pour $n \geq 2$, calculer les racines de T'_n à l'aide de la relation établie à la question 3, et donner une décomposition de T'_n en produit d'un réel et de polynômes unitaires de degré 1.
7. Question facultative : Soit n un entier, $n \geq 2$. Montrer que

$$(1 - X^2)T''_n(X) - XT'_n(X) + n^2T_n(X) = 0.$$

En déduire les coefficients de T_n .