# Exercices d'analyse asymptotique

## 1 Equivalents

**Exercice 1.** *Equivalents ou pas ?*

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes ?

**1**. $x \sim_{x\to+\infty} x+1$
**2**. $x^2 \sim_{x\to+\infty} x^2+x$
**3**. $\ln(x) \sim_{x\to+\infty} \ln(10^6 x)$
**4**. $\exp(x) \sim_{x\to+\infty} \exp\left(x+10^{-6}\right)$
**5**. $\exp(x) \sim_{x\to+\infty} \exp(2x)$
**6**. $\ln(x) \sim_{x\to+\infty} \ln(x+1)$.

**Exercice 2.** *Equivalents simples*

Donner un équivalent le plus simple possible de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$ en $+\infty$.
2. $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
3. $h(x) = \ln\left(7x^3+2x^2+1\right)$ en $+\infty$.
4. $\sin x$ lorsque $x \longrightarrow 0$.
5. $\ln(1+x)$ lorsque $x \longrightarrow 0$.
6. $e^x - 1$ lorsque $x \longrightarrow 0$.
7. $m(x) = x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$.

## 2 Calculs de développements limités.

**Exercice 3.**

Calculer les développements limités suivants :

**1**. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0
**2**. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
**3**. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0
**4**. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0
**5**. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0
**6**. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

**Exercice 4.**

Calculer les développements limités suivants en 0.

**1**. $\cos(x) - e^x$ à l'ordre 3
**2**. $1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7$ à l'ordre 3
**3**. $\sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 3
**4**. $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 3
**5**. $(1+x)^x$ à l'ordre 4
**6**. $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4
**7**. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2
**8**. $\dfrac{x\ln(1+x) - e^{x^2} + 1}{x^2}$ à l'ordre 2
**9**. $\dfrac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}$ à l'ordre 2
**10**. $(x+1)^{x^2+2x}$ à l'ordre 6

**Exercice 5.**

Calculer les développements limités suivants :

| | |
|---|---|
| **1.** $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2 | **2.** $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 3 en $-2$ |
| **3.** $e^{\cos x \ln x}$ à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{3}$ | **4.** $(1+\cos x)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{2}$ |

**Exercice 6.**

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

| | |
|---|---|
| **1.** $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 | **2.** $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0 |
| **3.** $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 | **4.** $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0. |

**Exercice 7.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+x+x^2}$.

1. Déterminer une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le développement limité à l'odre 3 en 0 de $F$.
3. En déduire le développement limité à l'odre 2 en 0 de $f$.

**Exercice 8.**

Déterminer $a$ et $b$ pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.

**Exercice 9.**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que $f$ admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$.
Donner un développement limité de $f^{-1}$ à l'ordre 3 en 0.

**Exercice 10.**

Soit $f : ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que $f$ est une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que $f$ est une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
3. On note $g$ la fonction réciproque de $f$. Montrer que $g$ possède un développement limité à l'ordre 2 au point 1 et calculer ce développement limité.
4. En déduire que le produit $t \cdot g(\frac{t}{t-1})$ a une limite finie, que l'on calculera, quand $t$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 11.**

Calculer, à l'ordre 100, le DL de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

## 3 Application au calcul de limites

**Exercice 12.**

En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x\ln(1+2x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2(x)}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos(x)}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x+3-\sqrt[4]{2+80x^3+16x^4})$

**Exercice 13.**

Déterminer les constantes $a$, $b$, $c$ pour que

$$\frac{\cos(x)}{\ln(1+x)}-\frac{a}{x} \text{ et } \frac{1}{\sin^3(x)}-\frac{1}{x^3}-\frac{b}{x^2}-\frac{c}{x}$$

tendent vers une limite finie quand $x\to 0$.

## 4 Application au prolongement par continuité

**Exercice 14.**

On considère la fonction définie par $f(x)=\frac{\sin(x)-x}{x^3}$.
Montrer qu'elle est prolongeable en fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On note $\tilde{f}$ cette fonction. Que vaut $\tilde{f}(0)$ ?
La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

**Exercice 15.**

On considère la fonction définie pour $x\in ]0,\pi[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{x^2}.$$

Déterminer le développement limité de $\ln(\frac{\sin(x)}{x})$ en 0 à l'ordre 4.
En déduire si la fonction $f$ est prolongeable par continuité en 0.
Si c'est le cas, ce prolongement par continuité est-il de classe $\mathcal{C}^1$.

## 5 Application à l'étude locale des courbes représentatives de fonctions

**Exercice 16.**

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}(1-x)+1$ et $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni du repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de $f$ au voisinage de 0 est :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2+x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).$$

2. En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de $T$ par rapport à $C_f$ au voisinage de ce point.
4. Dans un repère, tracer $T$ et $C_f$.

**Exercice 17.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

**Exercice 18.**

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$\textbf{1}.\ f(x) = \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}} \qquad \textbf{2}.\ g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$\textbf{3}.\ h(x) = \frac{x+1}{1 + \exp(1/x)} \qquad \textbf{4}.\ u(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$$

# 6 Développement asymptotique de suites implicites

**Exercice 19.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = |x \sin x|$.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. On notera $x_n$ cette solution.
2. Donner un équivalent simple de $x_n$
3. On note $y_n = x_n - n\pi$ de sorte que $x_n = n\pi + y_n$. Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est une suite convergente vers 0.
4. Donner un équivalent de $y_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 20.**

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera $u_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \ln n$.
4. En étudiant $v_n = u_n - \ln n$, montrer que

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$