Programme des colles du 10/03 au 14/03

1. Polynômes
   - L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.
   - Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant d'un polynôme non nul, polynôme unitaire.
   - Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
   - Opérations sur les polynômes : somme, produit, composition.
   - Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée.
   - Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $K[X] \setminus \{0\}$.
   - **Racines $\alpha \in \mathbb{K}$ (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité par $X - \alpha$.**

     Généralisation : Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont racines de P, alors $\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k) \big| P$.

     Cas d'un polynôme scindé à racines simples, expression à l'aide du coefficient dominant et des racines.
   - Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.
   - Multiplicité d'une racine : définition.
   - Généralisation des propriétés de divisibilité et de la définition de polynôime scindé dans le cas de racines multiples.
   - Liens coefficients racines des polynômes scindés : Somme et produit des racines.
   - Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$
   - Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$:

     $$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k.$$
   - Multiplicité d'une racine : caractérisation par les dérivées successives.
   - Théorème de d'Alembert-Gauss.
   - **Irréductibles et décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.**
2. Analyse asymptotique
   - Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
   - Liens entre ces notions, propriétés de calcul.
   - Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
   - **Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.**
   - Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
   - Calcul de développements limités d'une somme, d'un produit et même d'une composée sur des exemples simples où l'on a toujours à le faire en 0.