
Programme des colles du 17/03 au 21/03

1. Polynômes

- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.
- Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
- Racines $\alpha \in \mathbb{K}$ (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité par $X - \alpha$.

Généralisation : Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont racines de P , alors $\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k) \mid P$.

Cas d'un polynôme scindé à racines simples, expression à l'aide du coefficient dominant et des racines.

- Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .
- Multiplicité d'une racine : définition.
- Généralisation des propriétés de divisibilité et de la définition de polynôme scindé dans le cas de racines multiples.
- Liens coefficients racines des polynômes scindés : Somme et produit des racines.
- Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$
- Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

- Multiplicité d'une racine : caractérisation par les dérivées successives.
- Théorème de d'Alembert-Gauss.
- Irréductibles et décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2. Analyse asymptotique

- Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
- Liens entre ces notions, propriétés de calcul.
- Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
- **Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.**
- Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
- Calcul de développements limités d'une somme, d'un produit.
- Forme normalisée d'un développement limité.
- Développement limité d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.
- Développement limité d'une primitive
- DL_0 et limite de fonction, DL_1 et dérivabilité en un point.
- Lien entre régularité d'une fonction et développement limité : contre exemple $f : x \mapsto x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right)$ prolongé par continuité en 0 d'une fonction qui admet en tout point un DL à l'ordre n avec f' qui n'est pas continue en 0.
- **Tangente et position par rapport à la tangente (point d'inflexion).**
- Application des développements limités à la recherche d'asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

3. Espaces vectoriels.

- Définition d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- **Propriétés de calcul dans un e.v. : savoir prouver que $0x = 0_E$ si $x \in E$, $\lambda 0_E = 0_E$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et que $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.**
- Espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$.
- Combinaison linéaire des vecteurs d'une famille.
- Définition d'un sous-espace vectoriel