

Corrigé du devoir à la maison

Polynômes de Tchebycheff

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geq 1, T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. On calcule : $T_2(X) = 2X^2 - 1$, $T_3(X) = 4X^3 - 3X$ et $T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. T_n est de degré n , son coefficient dominant est 2^{n-1} , la fonction associée est paire si n est pair, impaire sinon. Prouvons tout cela par récurrence : l'initialisation est évidente pour $n = 1, 2, 3, 4$ puisqu'il suffit de vérifier ces faits sur les polynômes calculés à la question précédente.

Admettons donc toutes ces propriétés aux rangs $\leq n$ (où $n \geq 1$). La relation $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ nous permet de calculer le coefficient dominant de T_{n+1} puisque c'est celui de $2XT_n(X)$ qui est de degré $n + 1$ par hypothèse de récurrence tandis que T_{n-1} est de degré $n - 1$. Ce coefficient de degré $n + 1$ est donc $2 \times 2^{n-1} = 2^n$. On observe en outre que la multiplication par X transforme un polynôme de fonction associée paire en un polynôme de fonction associée impaire et réciproquement. Ainsi, le polynôme $2XT_n(X)$ est de la parité contraire de T_n , de même que T_{n-1} . Ceci prouve que T_{n+1} est bien de la parité opposée par rapport à T_n et achève cette démonstration par récurrence.

3. (a) Établissons par récurrence la relation suivante pour tout nombre réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la propriété est évidente. Admettons cette propriété aux rangs $\leq n$, on a alors au rang $n + 1$:

$$T_{n+1}(\cos(x)) = 2 \cos(x) \cos(nx) - \cos((n-1)x)$$

$$T_{n+1}(\cos(x)) = 2 \cos(x) \cos(nx) - \cos(nx - x)$$

$$T_{n+1}(\cos(x)) = 2 \cos(x) \cos(nx) - \cos(nx) \cos(x) - \sin(nx) \sin(x)$$

$$T_{n+1}(\cos(x)) = \cos(x) \cos(nx) - \sin(nx) \sin(x)$$

$$T_{n+1}(\cos(x)) = \cos(nx + x) = \cos((n+1)x).$$

- (b) Si $u \in [-1, 1]$, $\exists \theta \in [0; \pi]$ tel que $u = \cos(\theta)$. Ainsi, $|T_n(u)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$.
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, résolvons dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$: elle est équivalente à $\cos(nx) = 0$, c'est à dire $nx \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ ou encore $x \equiv \frac{\pi}{2n} [\frac{\pi}{n}]$. Ceci signifie que $x = \frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions dans $[0, \pi]$ sont donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

- (b) De la question précédente, on déduit comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ que T_n a donc n racines réelles dans $[-1, 1]$, et leur ensemble est :

$$\mathcal{R} = \left\{ \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

- (c) On peut alors factoriser T_n par ses racines et son coefficient dominant, puisque c'est un polynôme simplement scindé :

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right)$$

5. Pour cette cinquième question, on pouvait au choix utiliser le théorème de Rolle pour justifier que puisque T_n est scindé à racines simples dans \mathbb{R} , il en est de même pour T'_n (exercice vu en cours), ou bien argumenter en disant que l'on calcule explicitement toutes les racines de T'_n dans la question suivante, et qu'il y en a bien $n - 1$ distinctes alors que le degré de T'_n est $n - 1$.
6. Lorsque l'on dérive la relation du 3.(a), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\sin(x)T'_n(\cos(x)) = -n \sin(nx)$$

Or l'équation $\sin(nx) = 0$ équivaut à $nx \equiv 0[\pi]$, c'est à dire $x \equiv 0[\frac{\pi}{n}]$. La relation ci-dessus nous garantit que si $\sin(x) \neq 0$ et que $x \equiv 0[\frac{\pi}{n}]$, alors $T'_n(\cos(x)) = 0$. On en déduit $n - 1$ racines distinctes de T'_n :

$$\mathcal{R}' = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$$

On voit donc à nouveau que T'_n est scindé à racines simples. Son coefficient dominant se déduit de celui de T_n : c'est $n2^{n-1}$ et l'on peut finalement écrire :

$$T'_n(x) = n2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)$$

7. Soit n un entier, $n \geq 2$. Dérivons deux fois la relation obtenue au 3.(a) :

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

$$-\sin(x)T'_n(\cos(x)) = -n \sin(nx)$$

$$(-\sin(x))^2 T''_n(\cos(x)) - \cos(x)T'_n(\cos(x)) = -n^2 \cos(nx)$$

$$(1 - \cos^2(x))T''_n(\cos(x)) - \cos(x)T'_n(\cos(x)) + n^2 T_n(\cos(x)) = 0$$

Comme cette relation est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que le polynôme

$$(1 - X^2)T''_n(X) - XT'_n(X) + n^2 T_n(X)$$

a une infinité de racines puisque la fonction \cos prend toutes les valeurs entre -1 et 1 , donc ce polynôme est nul.

Notons $p = E\left(\frac{n}{2}\right)$, on sait alors que T_n est de la forme :

$$T_n(X) = a_n X^n + a_{n-2} X^{n-2} + a_{n-4} X^{n-4} + \dots + a_{n-2p} X^{n-2p}$$

où $a_n = 2^{n-1}$. Calculant le coefficient de degré $n - 2k$, $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, du polynôme nul indiqué ci-dessus, on obtient :

$$(n - 2k + 2)(n - 2k + 1)a_{n-2k+2} - (n - 2k)(n - 2k - 1)a_{n-2k} - (n - 2k)a_{n-2k} + n^2 a_{n-2k} = 0$$

Après simplification, on conclut :

$$a_{n-2k} = -\frac{(n - 2k + 2)(n - 2k + 1)}{4k(n - k)} a_{n-2k+2}$$

On démontre alors aisément par récurrence sur k que pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-2k+1)}{4^k k! n(n-1)\dots(n-k)} a_n$$

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k 2^{n-2k-1} n}{n-k} \binom{n-k}{k}$$