Programme des colles du 24/03 au 28/03

1. Polynômes
   - Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $K[X] \setminus \{0\}$.
   - Racines $\alpha \in \mathbb{K}$ (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité par $X - \alpha$.

     Généralisation : Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont racines de P, alors $\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k) \big| P$.

     Cas d'un polynôme scindé à racines simples, expression à l'aide du coefficient dominant et des racines.
   - Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.
   - Multiplicité d'une racine : définition.
   - Généralisation des propriétés de divisibilité et de la définition de polynôme scindé dans le cas de racines multiples.
   - Liens coefficients racines des polynômes scindés : Somme et produit des racines.
   - Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$
   - Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$: $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
   - Multiplicité d'une racine : caractérisation par les dérivées successives.
   - Théorème de d'Alembert-Gauss.
   - Irréductibles et décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
2. Analyse asymptotique
   - Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
   - Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
   - Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.
   - Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
   - Calcul de développements limités d'une somme, d'un produit.
   - Développement limité d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.
   - Développement limité d'une primitive
   - DL_0 et limite de fonction, DL_1 et dérivabilité en un point.
   - Lien entre régularité d'une fonction et développement limité.
   - **Tangente et position par rapport à la tangente (point d'inflexion).**
   - Application des développements limités à la recherche d'asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Espaces vectoriels.
   - Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   - **Propriétés de calcul dans un e.v. : savoir prouver que $0x = 0_E$ si $x \in E$, $\lambda 0_E = 0_E$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et que $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.**
   - Espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$.
   - Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   - Intersection de sous-espaces vectoriels.
   - Union de sous-espaces vectoriels F et G : ce n'est un s.e.v. que lorsque $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   - Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice.
   - Famille libre, famille liée.
   - Bases et coordonnées.
   - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   - Somme de deux sous-espaces vectoriels.
   - **Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection à savoir prouver.**
   - Sous-espaces supplémentaires.