
Programme des colles du 31/03 au 04/04

1. Analyse asymptotique
 - Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
 - Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
 - Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.
 - Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
 - Calcul de développements limités d'une somme, d'un produit.
 - Développement limité d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.
 - Développement limité d'une primitive
 - DL_0 et limite de fonction, DL_1 et dérivabilité en un point.
 - Lien entre régularité d'une fonction et développement limité.
 - Tangente et position par rapport à la tangente (point d'inflexion).
 - Application des développements limités à la recherche d'asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Espaces vectoriels.
 - Définition d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
 - **Propriétés de calcul dans un e.v. : savoir prouver que $0x = 0_E$ si $x \in E$, $\lambda 0_E = 0_E$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et que $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.**
 - Espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$.
 - Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
 - Intersection de sous-espaces vectoriels.
 - Union de sous-espaces vectoriels F et G : ce n'est un s.e.v. que lorsque $F \subset G$ ou $G \subset F$.
 - Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice.
 - Famille libre, famille liée.
 - Bases et coordonnées.
 - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 - Somme de deux sous-espaces vectoriels.
 - **Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection à savoir prouver.**
 - Sous-espaces supplémentaires.
 - Espaces de dimension finie, existence de bases et théorème de la base incomplète.
 - Toute famille de $n+1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée.
 - Si E est dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E , alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E .
 - Rang d'une famille de vecteurs.
 - Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
 - **Somme de deux sous-espaces :**

$$F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \text{ et}$$

$$G = \text{Vect}(e_p, e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Savoir prouver que $F + G$ est une somme directe si et seulement si la famille $e = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est libre, savoir (sans preuve) que $F + G = E$ si et seulement si e est génératrice, et donc que F et G sont supplémentaires si et seulement si e est une base.

- Supplémentaires d'un sous-espace : existence, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
- Formule de Grassmann.