Devoir surveillé

1 Cours

1. Racine $\alpha \in \mathbb{K}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:rappeler la définition ainsi que la caractérisation par la divisibilité.
2. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sont les racines de P qui est scindé à racines simples et unitaire, qui est P ?
3. Multiplicité d'une racine : donner la définition.
4. Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$: la préciser.
5. Dans un espace vectoriel E, prouver que l'on a pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
   (a) $0x = 0_E$
   (b) $\lambda 0_E = 0_E$
   (c) $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$
6. Que signifie : la famille $u_1, u_2, \cdots, u_n$ est libre ?
7. Rappeler la définition de la somme $F + G$ si F et G sont des sous-espaces vectoriels.
8. Que signifie qu'une telle somme est directe ?
   Rappeler la définition ainsi que la caractérisation par l'intersection.

2 Développements limités

2.1 Deux méthodes pour un même développement

1. Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$, de partie régulière $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n ; c'est à dire que :
$$f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n).$$
   (a) Montrer que l'application $x \mapsto f(x+x^2)$ admet en 0 un développement limité d'ordre n, expliquer comment l'on calcule la partie régulière de ce développement.
   (b) Application pratique : rappeler le développement limité à l'ordre n en 0 de
$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$$
   et calculer ainsi le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction
$$g : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$
   (c) Reprendre le calcul du développement limité de g à l'ordre 4 en 0 de la question précédente en utilisant astucieusement la formule $(1-x)(1+x+x^2) = 1 - x^3$.

2.2 Application des développements limités à l'étude locale des courbes représentatives de fonctions

Soit h la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{2x}(1-x)+1$ et C_h la courbe représentative de h dans le plan muni du repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de h au voisinage de 0 est :

$$h(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C_h au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de T par rapport à C_h au voisinage de ce point.
4. Dans le repère, tracer T et C_h.

2.3 Développement à l'ordre 100

Calculer, à l'ordre 100, le DL de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$ avec $x \to 0$.