Corrigé du devoir surveillé

1 Première partie du DS

1.1 Deux méthodes pour un même développement

1. Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$, de partie régulière $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n ; c'est à dire que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n).$$

(a) Lorsque x tend vers 0, $x + x^2$ tend aussi vers 0 et l'on a $x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$, d'où $o((x + x^2)^n) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, donc on peut affirmer :

$$f(x + x^2) \underset{x\to 0}{=} P(x + x^2) + o(x^n).$$

$x \mapsto f(x+x^2)$ admet donc en 0 un développement limité d'ordre n, dont on calcule la partie régulière en éliminant les termes de degré supérieur strictement à n du polynôme $P(X+X^2)$.

(b) Application pratique : rappelons le développement limité à l'ordre n en 0 de :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Calculons ainsi le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{1 + x + x^2}.$$

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - (x + x^2) + (x + x^2)^2 - (x + x^2)^3 + (x + x^2)^4 + o(x^4)$$
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + o(x^4)$$
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$$

(c) Reprenons le calcul du développement limité de g à l'ordre 4 en 0 de la question précédente en utilisant astucieusement la formule $(1 - x)(1 + x + x^2) = 1 - x^3$:

$$\frac{1}{1 + x + x^2} = \frac{1 - x}{1 - x^3}$$
$$\frac{1}{1 + x + x^2} \underset{x\to 0}{=} (1 - x)(1 + x^3) + o(x^4)$$
$$\frac{1}{1 + x + x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$$

1.2 Application des développements limités à l'étude locale des courbes représentatives de fonctions

Soit h la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{2x}(1-x)+1$ et C_h la courbe représentative de h dans le plan muni du repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Puisque h est composée de fonctions qui admettent des développements limités à tout ordre, on peut calculer le développement limité d'ordre 3 de h au voisinage de 0 :

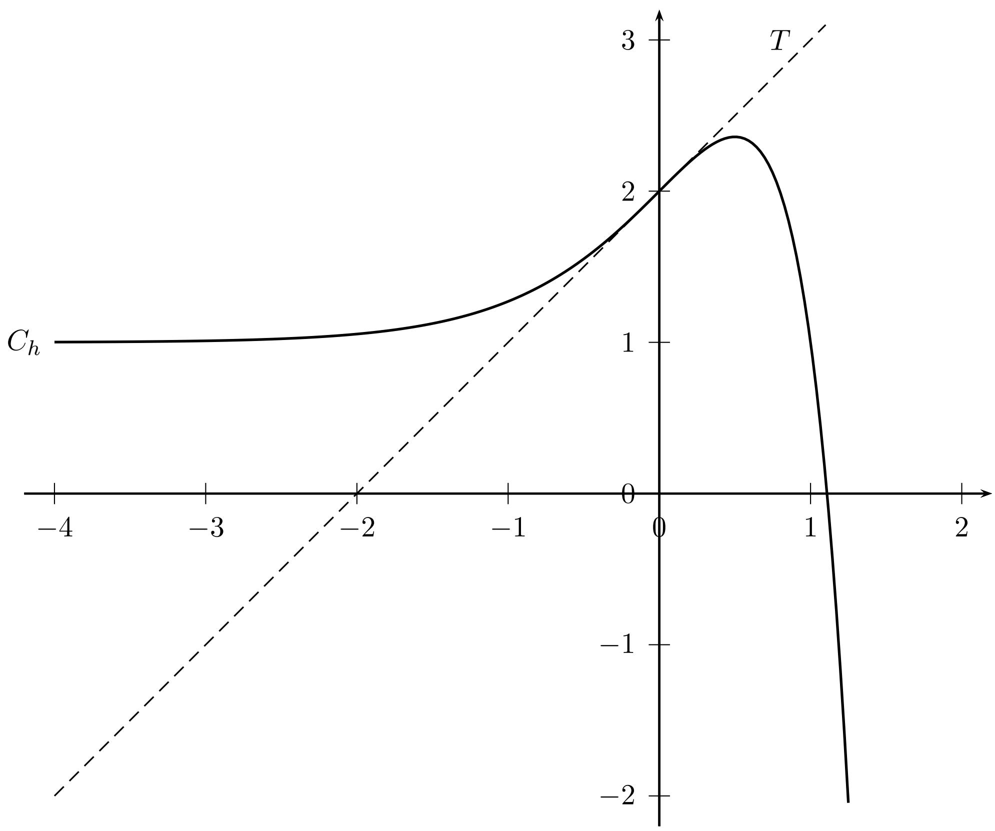
$$h(x) \underset{x\to 0}{=} (1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3))(1-x)+1$$

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} (1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3))(1-x)+1$$

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3-x-2x^2-2x^3+1+o(x^3)$$

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} 2+x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).$$

2. La tangente T à la courbe C_h au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = x+2$.
3. C_h est en dessous de T pour $x > 0$ car $-\frac{2}{3}x^3 < 0$ dans ce cas, et au dessus de T pour $x < 0$
4. Dans le repère, traçons T et C_h :



1.3 Développement à l'ordre 100

Calculer, à l'ordre 100, le DL de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$ avec $x \to 0$.
On rappelle que :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})$$

On en déduit :

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) = \ln\left(e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})\right)$$

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) = \ln\left(e^x\left(1 - e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x}x^{100})\right)\right)$$

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) = x + \ln\left(1 - e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x}x^{100})\right)$$

Or on a :

$$e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{100}}{100!}$$

$$\ln(1+y) \underset{y\to 0}{\sim} y$$

On conclut :

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) = x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$$

2 Deuxième partie du DS

Exercice 1. *Polynômes de Tchebycheff*

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geq 1,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. On calcule : $T_2(X) = 2X^2 - 1$, $T_3(X) = 4X^3 - 3X$ et $T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. T_n est de degré n, son coefficient dominant est 2^{n-1}, la fonction associée est paire si n est pair, impaire sinon. Prouvons tout cela par récurrence : l'initialisation est évidente pour $n = 1, 2, 3, 4$ puisqu'il suffit de vérifier ces faits sur les polynômes calculés à la question précédente.

   Admettons donc toutes ces propriétés aux rangs $\leq n$ (où $n \geq 1$). La relation $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ nous permet de calculer le coefficient dominant de T_{n+1} puisque c'est celui de $2XT_n(X)$ qui est de degré $n+1$ par hypothèse de récurrence tandis que T_{n-1} est de degré $n-1$. Ce coefficient de degré $n+1$ est donc $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. On observe en outre que la multiplication par X transforme un polynôme de fonction associée paire en un polynôme de fonction associée impaire et réciproquement. Ainsi, le polynôme $2XT_n(X)$ est de la parité contraire de T_n, de même que T_{n-1}. Ceci prouve que T_{n+1} est bien de la parité opposée par rapport à T_n et achève cette démonstration par récurrence.
3. (a) Établissons par récurrence les relations suivantes pour tout nombre réel x :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)\ ;\ T_n(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(nx)$$

   Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la propriété est évidente. Admettons cette propriété aux rangs $\leq n$, on a alors au rang $n+1$:

   $$T_{n+1}(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x)$$

   $$T_{n+1}(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos(nx - x)$$

   $$T_{n+1}(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x)$$

   $$T_{n+1}(\cos(x)) = \cos(x)\cos(nx) - \sin(nx)\sin(x)$$

$$T_{n+1}(\cos(x)) = \cos(nx + x) = \cos((n+1)x).$$

De même, on vérifie aisément par le calcul que la fonction ch vérifie la relation :

$$2\text{ch}(x)\text{ch}(nx) - \text{ch}((n-1)x) = \text{ch}((n+1)x).$$

On peut donc appliquer exactement le même raisonnement pour obtenir la formule avec le cosinus hyperbolique.

(b) Si $u \in [-1, 1]$, $\exists \theta \in [0; \pi]$ tel que $u = \cos(\theta)$. Ainsi, $|T_n(u)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$.

(c) De même, si $u \in]1, +\infty[$, $\exists x \in]0, +\infty[$ tel que $u = \text{ch}(x)$ donc $T_n(u) = \text{ch}(nx) > 1$.

(d) Par parité de la fonction $u \mapsto |T_n(u)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit pour tout $u \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$, $|T_n(u)| > 1$.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, résolvons dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$: elle est équivalente à $\cos(nx) = 0$, c'est à dire $nx \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou encore $x \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$. Ceci signifie que $x = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions dans $[0, \pi]$ sont donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

(b) De la question précédente, on déduit comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ que T_n a donc n racines réelles dans $[-1, 1]$, et leur ensemble est :

$$\mathcal{R} = \left\{ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

(c) On peut alors factoriser T_n par ses racines et son coefficient dominant, puisque c'est un polynôme simplement scindé :

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

5. Soit n un entier, $n \geq 2$. Dérivons deux fois la relation obtenue au 3.(a) :

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

$$-\sin(x)T_n'(\cos(x)) = -n\sin(nx)$$

$$(-\sin(x))^2 T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) = -n^2\cos(nx)$$

$$(1 - \cos^2(x))T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) + n^2 T_n(\cos(x)) = 0$$

Comme cette relation est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que le polynôme

$$(1 - X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2 T_n(X)$$

a une infinité de racines puisque la fonction cos prend toutes les valeurs entre -1 et 1, donc ce polynôme est nul.

Notons $p = E\left(\frac{n}{2}\right)$, on sait alors que T_n est de la forme :

$$T_n(X) = a_n X^n + a_{n-2}X^{n-2} + a_{n-4}X^{n-4} + ... + a_{n-2p}X^{n-2p}$$

où $a_n = 2^{n-1}$. Calculant le coefficient de degré $n - 2k$, $k \in [\![1, p]\!]$, du polynôme nul indiqué ci-dessus, on obtient :

$$(n-2k+2)(n-2k+1)a_{n-2k+2} - (n-2k)(n-2k-1)a_{n-2k} - (n-2k)a_{n-2k} + n^2 a_{n-2k} = 0$$

Après simplification, on conclut :

$$a_{n-2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{4k(n-k)}a_{n-2k+2}$$

On démontre alors aisément par récurrence sur k que pour $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{n(n-1)...(n-2k+1)}{k!n(n-1)...(n-k)}a_n$$

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k 2^{n-2k-1}n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

Rappelons le lien entre ces coefficients et les racines de T_n calculées au 4.(b). :

$$a_m = (-1)^{n-m}a_n \sum_{0 \le i_1 < i_2 ... < i_m \le n-1} \prod_{j=1}^{m} \cos\left(\frac{(2i_j+1)\pi}{2n}\right)$$

Exercice 2. *Familles de vecteurs, sous-espaces*

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,3)$, $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (2,-1,4)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1,u_2) = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.
   On peut remarquer, par exemple en résolvant des systèmes à deux inconnues, que l'on a :
   $$v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2,$$
   $$v_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2.$$
   On en déduit que $\mathrm{Vect}(v_1,v_2) \subset \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, or ces deux s.e.v. sont de dimension 2 puisqu'ils sont l'un comme l'autre engendrés par une famille de deux vecteurs non colinéaires donc on peut conclure qu'ils sont égaux.
2. Cherchons le rang, dans $\mathbb{R}^4$, de la famille :
   $$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
   $$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u-2w = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z-3w = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$
   $$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u-2w+v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad z-3w+2v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
   Arrivé à ce point, on a $\mathrm{Vect}(u,v,w,z) = \mathrm{Vect}(w,v,u-2w+v,z-3w+2v)$:
   L'inclusion $\mathrm{Vect}(w,v,u-2w+v,z-3w+2v) \subset \mathrm{Vect}(u,v,w,z)$ est évidente, et l'on remarque que $u = (u-2w+v)+2w-v \in \mathrm{Vect}(w,v,u-2w+v,z-3w+2v)$ et $z = (z-3w+2v)+3w-2v \in \mathrm{Vect}(w,v,u-2w+v,z-3w+2v)$, ce qui nous assure que $\mathrm{Vect}(w,v,u-2w+v,z-3w+2v) \subset \mathrm{Vect}(u,v,w,z)$.
   Ainsi, $\mathrm{Vect}(u,v,w,z) = \mathrm{Vect}(w,v,u-2w+v)$ puisque $u-2w+v = z-3w+2v$.

Il est aisé de voir que $(w, v, u-2w+v)$ est une famille libre : si λ, μ, ν vérifient $\lambda w+\mu v+\nu(u-2w+v)=0$, on a alors : $\begin{cases} \lambda & =0 \\ 2\lambda+3\mu & =0 \\ 3\lambda-\mu-3\nu & =0 \end{cases}$

On en déduit que $\lambda=0$, puis $\mu=0$ et $\nu=0$.

La famille de vecteurs étudiée est donc de rang 3 puisque $(w, v, u-2w+v)$ est une famille libre et génératrice de $\text{Vect}(u, v, w, z)$.

3. Soient $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $e_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $E=\mathbb{R}^4$.

Posons $F=\text{Vect }\{e_1, e_2\}, G=\text{Vect }\{e_3, e_4\}, G'=\text{Vect }\{e_3, e_4, e_5\}$.

Montrons que F et G sont supplémentaires dans E :

On sait que $F=\{\alpha e_1+\beta e_2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ et que $G=\{\lambda e_3+\mu e_4, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Ainsi, si $x \in F \cap G$, on a alors $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4$ tels que $x=\alpha e_1+\beta e_2=\lambda e_3+\mu e_4$. Ceci signifie : $\begin{cases} \alpha & =\lambda+\mu \\ \alpha+\beta & =\lambda \\ \beta & =0 \\ \lambda & =0 \end{cases}$ donc $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)=(0,0,0,0)$ et $x=0$. Ainsi, $F \cap G=\{0\}$.

La famille (e_1, e_2) est libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. De même pour (e_2, e_3) donc F et G sont de dimension 2. Comme E est de dimension 4, on conclut que F et G sont supplémentaires.

Concernant G', ce sous espace est de dimension 3 car on peut vérifier que la famille (e_3, e_4, e_5) est libre. Si λ, μ, ν vérifient $\lambda e_3+\mu e_4+\nu e_5=0$, on a alors : $\begin{cases} \lambda+\mu+\nu & =0 \\ \lambda+\nu & =0 \\ \nu & =0 \end{cases}$

On en déduit que $(\lambda, \mu, \nu)=(0,0,0)$.

Puisque $\dim G'+\dim F=5$, ces deux sous-espaces ne peuvent pas être supplémentaires.

Exercice 3. *Plus théorique*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrons que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Longleftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

Si $F \subset G$, alors $F \cup G=G$ donc $F \cup G$ est bien un sous espace vectoriel. De même, si $G \subset F$, $F \cup G=F$ est aussi un sous espace vectoriel de E.

Enfin, si aucune des deux inclusions n'est vérifiée, on a un élément $g \in G \backslash F$ et un autre élément $f \in F \setminus G$. On remarque que $f+g$ n'est pas dans F (sinon, on aurait $f+g=f' \in F$ donc $g=f'-f \in F$) ni dans G. Donc $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoriel.

2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouvons que

$$G \subset F \Longrightarrow F \cap(G+H)=G+(F \cap H).$$

On suppose donc que $G \subset F$.

Soit $x \in F \cap(G+H)$, on a alors $g \in G$ et $h \in H$ tels que $x=g+h$. Comme $x \in F$ et que $g \in F$ (puisque $G \subset F$), $h=x-g \in F$. Ainsi, on voit que $h \in(F \cap H)$ et donc que $x \in G+(F \cap H)$.

On a déjà prouvé une inclusion : $F \cap(G+H) \subset G+(F \cap H)$.

Soit maintenant $x \in G+(F \cap H)$, on a alors $g \in G$ et $\phi \in F \cap H$ tels que $x=g+\phi$. Il est immédiat que $x \in G+H$, et l'on remarque que $g \in F$, $\phi \in F$ donc $x=g+\phi \in F$. Ainsi, $x \in F \cap(G+H)$ donc on a prouvé la deuxième inclusion : $G+(F \cap H) \subset F \cap(G+H)$.