Devoir surveillé

Exercice 1. *Polynômes de Tchebycheff*

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geq 1,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
2. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Établir par récurrence les relations suivantes pour tout nombre réel x :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)\ ;\ T_n(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(nx)$$

   (b) En déduire que $|T_n(u)| \leq 1$ pour $u \in [-1; 1]$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $u \in]1, +\infty[$, $T_n(u) > 1$ (on pourra poser $u = \mathrm{ch}(x)$).
   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$, $|T_n(u)| > 1$.
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une décomposition de T_n en produit d'un réel et de polynômes unitaires de degré 1.
5. Soit n un entier, $n \geq 2$. Montrer que

   $$(1 - X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.$$

   En déduire les coefficients de T_n. Rappeler le lien entre ces coefficients et les racines de T_n calculées au 4.(b).

Exercice 2. *Familles de vecteurs, sous-espaces*

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 3)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 4)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
2. Trouver le rang, dans $\mathbb{R}^4$, de la famille :

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $E = \mathbb{R}^4$.
   Posons $F = \mathrm{Vect}\ \{e_1, e_2\}, G = \mathrm{Vect}\ \{e_3, e_4\}, G' = \mathrm{Vect}\ \{e_3, e_4, e_5\}$.
   Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Qu'en est-il de F et G' ?

Exercice 3. *Plus théorique*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que

$$G \subset F \implies F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$