Applications linéaires

1 Définitions, noyau, image

Exercice 1.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array}.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer $\mathrm{Im}\ f + \mathrm{Ker}\ f$.
4. Expliciter $f \circ f$.

Exercice 2.
On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z).$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\ (f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_a l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f_a \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (8x-2y+az, ax+y+2z) \end{array}.$$

1. Montrer que f_a est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f_a en fonction de a.

Exercice 4.
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x-y+z, y+z+t, 0, x+y+3z+2t).$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Quelle est la dimension du noyau de f ?
   Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}\ (f)$.

Exercice 5.
On considère dans $\mathbb{R}^2$ les trois vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

1. Démontrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

Indication : Exprimer w dans la base (u, v).

Exercice 6.
Soient E un $\mathbb{K}$ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}$$

est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 7.
Soient E un $\mathbb{K}$ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^2 = u \circ u$.

1. Montrer :
$$E = \text{ Ker } u + \text{ Im } u \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im } u = \text{ Im } u^2.$$
2. Montrer :
$$\text{Ker } u = \text{ Ker } u^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im } u \cap \text{ Ker } u = \{0\}.$$
3. Que peut-on dire si E est de dimension finie ?

Exercice 8.
Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 - 3f + 2\text{Id} = 0$, où $f^3 = f \circ f \circ f$.
Montrer que f est un automorphisme de E.

Exercice 9.
Soient E un $\mathbb{K}$ev et $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On suppose que pour tout x de E, $f(x) \times g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 10.
Soit E le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$.
Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

2 Applications linéaires sur des espaces de polynômes

Exercice 11.
Soient f et g les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définies par :
$f(P) = P'$ et $g(P)$ est l'unique primitive de P nulle en 0.

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Donner les noyaux et les images de f et g.
3. Montrer que Ker f et Im g sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 12.
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ f(P) = P(X + 1) - P(X)$$

Exercice 13.
Soient $n \geq 2$ et :
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & P(X+1)+P(X-1)-2P(X) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire. Déterminer son image, son noyau et son rang.
2. Soit $Q \in \text{Im } f$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 14.
Montrer que l'application suivante est un isomorphisme :
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & & P & \mapsto & \big(P(1), P'(1), \dots, P^{(n)}(1)\big) \end{array}$$

Exercice 15.
Soient $a_1, \dots, a_p$ dans $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, $n_1, \dots, n_p$ dans $\mathbb{N}$.
On pose $N = (n_1+1) + \cdots + (n_p+1)$.
Soit $(b_0^1, \dots, b_{n_1}^1, b_0^2, \dots, b_{n_2}^2, \dots, b_0^p, \dots, b_{n_p}^p) \in \mathbb{K}^N$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{N-1}[X]$ tel que :
$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall j \in \{0, \dots, n_i\}, \qquad P^{(j)}(a_i) = b_j^i.$$

Indication. Considérer :
$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathbb{K}_{N-1}[X] & \to & \mathbb{K}^N \\ & & P & \mapsto & \big(P(a_1), P'(a_1), \dots, P^{(n_1)}(a_1), P(a_2), P'(a_2), \dots, P^{(n_2)}(a_2), \dots, P(a_p), \dots, P^{(n_p)}(a_p)\big) \end{array}$$

3 Projecteurs et symétries

Exercice 16.
Soient $E = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 1)$ et $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0\}$. Trouver le coordonnées de l'image du vecteur (x,y,z) par la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}\, v$ parallèlement à H.

Exercice 17.
Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur. Montrer que $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si Im p et Ker p sont stables par f.

Exercice 18.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que :
$$\text{Im } p = \text{Im } q \quad \Leftrightarrow \quad p \circ q = q \quad \text{et} \quad q \circ p = p.$$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Ker p = Ker q.
3. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer qu'alors
$$\text{Im } (p+q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q \quad \text{et} \quad \text{Ker } (p+q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q.$$

Exercice 19.
Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que :
$$\text{Ker } (v \circ u) = \text{Ker } u \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im} u \cap \text{Ker } v = \{0\}.$$
2. Montrer que :
$$\text{Im}(v \circ u) = \text{Im} v \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im} u + \text{Ker } v = E.$$

4 Théorème du rang

Exercice 20.
Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux s.e.v. de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ de noyau F_1 et d'image F_2.

Exercice 21.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $2p$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^2 = 0$ et $\text{rg } f = p$ si et seulement si $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

Exercice 22.
Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, u et v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que :
$$\text{rg } u + \text{rg } v - n \leq \text{rg } (u \circ v) \leq \min\{\text{rg } u, \text{rg } v\}.$$
2. Montrer que :
$$|\text{rg } u - \text{rg } v| \leq \text{rg } (u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v.$$
3. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \text{GL}(E)$. Calculer $\text{rg } u + \text{rg } v$.

5 Exercices plus ardus

Exercice 23.
Soir E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Déterminer les $f \in \mathcal{L}(E)$ telles que : $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ liée.

Exercice 24. *Lemmes de factorisations.*
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Soient $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Montrer :
$$\text{Im } u \subset \text{Im } v \quad \Leftrightarrow \quad \exists w \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), \quad u = v \circ w.$$
2. Soient $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Montrer :
$$\text{Ker } v \subset \text{Ker } u \quad \Leftrightarrow \quad \exists w \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G), \quad u = w \circ v.$$

Exercice 25.
Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

1. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Montrer que $\big(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.
2. Quels sont les sous-espaces stables par f ?
3. Montrer que $(\text{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de
$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.