Programme des colles du 07/04 au 11/04

1. Espaces vectoriels.
   — Intersection de sous-espaces vectoriels.
   — Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice.
   — Famille libre, famille liée.
   — Bases et coordonnées.
   — Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   — Somme de deux sous-espaces vectoriels.
   — Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection.
   — Sous-espaces supplémentaires.
   — Espaces de dimension finie, existence de bases et théorème de la base incomplète.
   — Toute famille de $n+1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée.
   — Si E est dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
   — Rang d'une famille de vecteurs.
   — Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
   — **Somme de deux sous-espaces :**

   $$F = \text{ Vect } (e_1, e_2, \cdots, e_p) \text{ et}$$

   $$G = \text{ Vect } (e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n).$$

   Savoir prouver que $F+G$ est une somme directe si et seulement si la famille $e = (e_1, e_2, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ est libre, savoir (sans preuve) que $F+G=E$ si et seulement si e est génératrice, et donc que F et G sont supplémentaires si et seulement si e est une base.
   — Existence de supplémentaires, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
   — Formule de Grassmann.
2. Applications linéaires.
   — Définition de la linéarité, exemples.
   — Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
   — Isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme.
   — Image directe d'un s.e.v., image réciproque d'un s.e.v..
   — Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
   — Applications linéaires de rang fini.
   — Invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
   — Endomorphismes
   — **Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Connaître parfaitement la définition, savoir l'illustrer par un schéma.**

   Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = Id_E$ (**La démonstration de la caractérisation des projecteurs peut être demandée aux étudiants les plus à l'aise avec le cours de maths, s'ils l'acceptent**)
   — Groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E, définition de u^k si $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
   — **Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E**
   — Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
   — Espaces de dimension finie et isomorphismes.