

Programme des colles du 28/04 au 02/05

1. Espaces vectoriels.
 - Toute famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée.
 - Si E est dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E , alors $\mathcal{F}$ est une base de E s.s. $\mathcal{F}$ est libre, s.s. $\mathcal{F}$ est génératrice de E .
 - Rang d'une famille de vecteurs.
 - Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
 - Existence de supplémentaires, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
 - Formule de Grassmann.
2. Applications linéaires.
 - Définition de la linéarité, exemples.
 - Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
 - Isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme.
 - Image directe d'un s.e.v., image réciproque d'un s.e.v..
 - Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
 - Applications linéaires de rang fini.
 - Invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
 - Endomorphismes
 - **Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Connaître parfaitement la définition, savoir l'illustrer par un schéma.**
 Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = Id_E$ (La démonstration de la caractérisation des projecteurs peut être demandée aux étudiants les plus à l'aise avec le cours)
 - Groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de E , définition de u^k si $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
 - **Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E**
 - Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
 - Espaces de dimension finie et isomorphismes.
 - **Théorème du rang :**
 - **Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et que S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, alors $u|_S^{\text{Im } u}$ est un isomorphisme.**
 - **Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et :**

$$\text{rg } (u) + \dim (\text{Ker } u) = \dim (E).$$
3. Matrices d'applications linéaires.
 - Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
 - Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 - Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
 - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire avec la matrice de l'application.
 - Matrice d'une composée.
 - Lien entre isomorphismes et matrices inversibles
 - Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, rang et noyau d'une matrice.
 - Théorème du rang pour une matrice.
 - Invariance du rang par les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, ainsi que par transposition.