Devoir à la maison

Exercice 1. *Coïncidence*

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 3)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 4)$. Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer que $\text{Vect}\big((2, 3, -1), (1, -1, 2)\big) = \text{Vect}\big((3, 7, -4), (5, 0, 5)\big)$

Exercice 2. *Fonctions affines, et plus si affinités*

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.
2. Soit $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})|\ f(0) = f(1) = 0\}$; montrer que G est un sev de E et en donner un supplémentaire. (Indication : titre de l'exercice)

Exercice 3. *Premiers exemples de bases*

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (-1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 1, -1)$.

1. Vérifier qu'ils forment une base.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans cette base.
3. Mêmes questions avec les vecteurs $u = (1, 2, 3),\ v = (2, 3, 1),\ w = (3, 1, 2)$.

Exercice 4. *Sous-espaces définis par des équations*

1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0.\}$ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4|\ x - 2y + z + t = 0 \text{ et } 2x + y - z + t = 0\}$. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^4$. Déterminer une base de F.
3. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + 2z - 3t = 0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Exercice 5. *Espace de polynômes*

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on note $P_0(X) = X^3$, $P_1(X) = (X - 1)^3$ et $P_2(X) = (X - 2)^3$ et l'on définit l'ensemble F par :

$$F = \{P \in E \mid P(0) + P(2) = 8P(1)\}$$

1. Rappeler la base canonique de E ainsi que la dimension de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Déterminer le rang de la famille (P_0, P_1, P_2).
4. Déterminer une base de F et sa dimension.